Könyvtára

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том VI

4

1961

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Главный редактор В. А. КОТЕЛЬНИКОВ

Заместители гл. редактора: Д. В. ЗЕРНОВ, Ю. Б. КОБЗАРЕВ

Редакционная коллегия:

А. И. БЕРГ, Б. А. ВВЕДЕНСКИЙ, И. С. ГОНОРОВСКИЙ, В. Л. ГРАНОВСКИЙ, Л. А. ЖЕКУЛИН, Н. Д. ДЕВЯТКОВ, Л. Н. ДОБРЕЦОВ, А. Н. КАЗАНЦЕВ, С. Г. КАЛАШНИКОВ, П. Л. КАПИЦА, В. В. МИГУЛИН, А. Л. МИКАЭЛЯН, А. А. ПИСТОЛЬКОРС, А. М. ПРОХОРОВ, С. М. РЫТОВ, В. И. СИФОРОВ, Я. Н. ФЕЛЬД, С. Э. ХАЙКИН, Б. М. ЦАРЕВ

Ученый секретарь Г. А. БЕРНАШЕВСКИЙ

MTA. Számtecha. Könyvtára
Leltározva
1962 év 482 sz.

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

MTA Számítástechnikai Könyvtára

Том VI АПРЕЛЬ, 1961 Вып. 4

СОДЕРЖАНИЕ

ивов А. Н. Электродинамическая теория частой плоской решетки из параллельных проводов 483
втянов С. И., Кулешов В. Н. Флуктуации в автогенераторах 496
ульман Н. К., Ланда П. С. Исследование на электронных моделях некоторых оптимальных устройств для фильтрации импульсных сигналов случайной длительности 506
исаренко В. Ф. К задаче обнаружения случайного сигнала на фоне шума . . 514
езин Ю. С. Влияние параметров накопительных устройств на эффективность их работы 529
артаковский Г. П. Радиодальномер с частотной модуляцией при воздействии шумов и при флуктуациях отраженного сигнала 536
инбер Б. Е. О боковом излучении зеркальных антенн 545
фимцев П. Я. Симметричное облучение конечных тел вращения 559
ядьков С. Резонансные преобразования и их свойства 568
амуйлов Г. П. О приближенном расчете собственных значений высших типов волн в полосковых линиях 579
ашенков В. М. Волновые сопротивления многопроводных линий с круглыми проводниками 584
илимонов Г. Ф. Влияние двух видов продольной периодической модуляции на свойства однолучевого потока электронов 593
алышев В. А. К теории диодных СВЧ-генераторов 604
грицкий А. Л. Расчет периодических электростатических полей, создаваемых бифилярными спиралями в лампах бегущей волны 613
икаэлян А. Л., Васильев А. А. Взаимодействие магнитостатических колебаний в ферритовом образце при регенерации. Ч. I. Взаимодействие простейших типов колебаний 623
онончук Л. В. Некоторые свойства многощелочного фотокатода, выполненного в виде массивного слоя 631
акал М., Добрецов Л. Н. Вакуумный конденсатор Милликена. Ч. I. 637
финогенов Л. П., Бакал М., Филиппов Ю. А. Вакуумный конденсатор Милликена. Ч. II 642

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ыбаков Б. С. Шенноновская схема для гауссовского сообщения с равномерным спектром и канала с флуктуационным шумом 649
инбер Б. Е. К теории приемной антенны 651
естопалов В. П., Якименко И. П. О затухании медленных электромагнитных волн в плазменном стержне при наличии продольного магнитного поля 653
асс Ф. Г. О граничных условиях электродинамики на плоской поверхности с произвольным значением диэлектрической проницаемости 655
ахрах Л. Э. Об оценке влияния тепловых скоростей в электронных пучках . . 656
орев Н. Д. К расчету трубчатых электронных пучков 659
ябин В. А. Анализатор поляризации 661
огданов Г. Б. О возможности применения ферритов для абсолютного измерения мощности СВЧ. 663
ишин Д. Д., Калягина Л. А. Влияние температурной предыстории на магнитную проницаемость никель-цинковых ферритов 667

Бронштейн И. М., Щучинский Я. М. Энергетический спектр медленных вторичных электронов при адсорбции бериллия на вольфраме 6
Ждан А. Г., Елинсон М. И. Распределение эмиттированных автоэлектронов по энергиям для полупроводников 6

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Мирошниченко Л. С. Фотоэлектронная эмиссия LaB_6 6
Алесковский Ю. М., Грановский В. Л., Михалец Е. Рекомбинационное излучение цезиевой плазмы в магнитном поле 6

ХРОНИКА

Вайнштейн Л. А. Симпозиум по дифракции волн 67
Патрушев В. Л., Герштейн Г. М., Красильников В. Я. Венедикт Иванович Калинин 67

Адрес редакции: Москва, К-9, Моховая, 11, Институт радиотехники и электроники
редакция журнала «Радиотехника и электроника»
Технический редактор *Т. А. Аверкиева*

Т—05204 Подписано к печати 1/IV—1961 г. Тираж 6000 экз. Зак. 1459
Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Печ. л. 17,12 Бум. л.6,25 Уч.-изд. листов 18,9

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

1961 № 4

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧАСТОЙ ПЛОСКОЙ РЕШЕТКИ ИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДОВ

А. Н. Сивов

Решена электродинамическая задача по отысканию коэффициентов отражения и прохождения при наклонном падении плоской электромагнитной волны на плоскую решетку в свободном пространстве. Период решетки предполагается малым по сравнению с длиной волны. Учтена форма провода. Полученные формулы дают, в частности, предельный переход при неограниченном сближении проводов (при этом решетка переходит в гофрированную поверхность).

Найдены поля вблизи проводов. Получена система эквивалентных граничных условий для решетки. Указано на ошибку Лемба в акустической задаче для решетки из круглых стержней. Выражения для полей вблизи проводов дают возможность учесть потери, вызываемые неидеальностью проводников.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ВВЕДЕНИЕ

На плоскую бесконечную решетку, расположенную в свободном пространстве ($\varepsilon = \mu = 1$), наклонно падает плоская электромагнитная волна. Решетка образована параллельными проводами, имеющими в поперечном сечении две оси симметрии. В предположении малости периода по сравнению с длиной волны нужно найти прошедшее и отраженное поля, поля в непосредственной близости проводников, а также получить локальные граничные условия, эквивалентные действию решетки. Решение поставленной задачи предпринято для исследования затухания и фазовых характеристик электромагнитных волн в периодических волноводах.

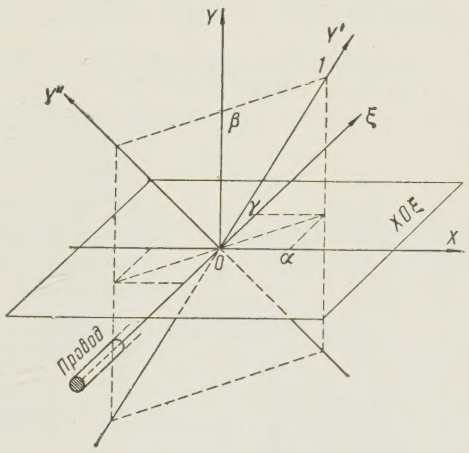


Рис. 1

Введем прямоугольную систему координат x, ξ, y, связанную с решеткой следующим образом (рис. 1). Ось ox перпендикулярна проводам и лежит в плоскости решетки, $o\xi$ направлена вдоль проводов и проходит через центр сечения одного из них, oy совпадает с нормалью к плоскости решетки. Решетка образована параллельными идеально проводящими проводами произвольной формы поперечного сечения, имеющего, однако, две оси симметрии ox и oy. Период решетки p мал по сравнению с длиной волны λ, так что безразмерный параметр kp ($k = 2\pi/\lambda$) есть малая величина. Зависимость полей от времени примем в форме $\exp(i\omega t)$. Со стороны отрицательных значений оси y' (рис. 1), направление которой в системе x, ξ, y фиксируется направляющими косинусами α, γ, β ($\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 = 1$), на решетку набегает плоская электромагнитная волна единичной амплитуды. Отраженная от решетки волна уходит в отрицательном направлении

оси oy'', направляющие косинусы которой суть $-\alpha$, $-\gamma$, β. Так как решетка однородна в направлении ξ, то зависимость полей от ξ будет такой же, как и в падающем поле, т. е. будет определяться множителем

$$e^{-ik\gamma\xi}, \quad \frac{\partial \ldots}{\partial \xi} = -ik\gamma. \tag{1}$$

В настоящей задаче приходится различать две поляризации падающей волны в зависимости от ориентации ее электрического и магнитного полей по отношению к направлению однородности решетки. В случае H-поляризации электрическое поле расположено в плоскости, перпендикулярной проводам, а магнитное поле имеет составляющую вдоль проводов. В случае E-поляризации магнитное поле перпендикулярно проводам, а электрическое поле имеет составляющую, направленную вдоль проводов. Для анализа общего случая достаточно рассмотреть в отдельности обе поляризации.

2. СЛУЧАЙ H-ПОЛЯРИЗАЦИИ ($E_\xi \equiv 0$)

В этом случае все составляющие поля согласно уравнениям Максвелла выражаются через H_ξ следующим образом:

$$E_x = \frac{-1}{ik(1-\gamma^2)} \frac{\partial H_\xi}{\partial y}, \quad H_x = \gamma E_y;$$

$$E_y = \frac{1}{ik(1-\gamma^2)} \frac{\partial H_\xi}{\partial x}, \quad H_y = -\gamma E_x. \tag{2}$$

Составляющая H_ξ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 H_\xi + k^2(1-\gamma^2) H_\xi = 0 \tag{3}$$

с граничным условием на контуре поперечного сечения провода $\left.\frac{\partial H_\xi}{\partial n}\right|_c = 0$ (n — направление нормали к контуру поперечного сечения провода).

1) Выражение полей в удаленных зонах через поля на контуре провода и на плоскости $y = 0$. На рис. 2 выделен типичный участок поля, ограниченный объемами V_1 и V_2, лежащими по разные стороны от решетки. Участки $5' - 5$ и $\bar{5}' - \bar{5}$ находятся от плоскости $y = 0$ на расстояниях, обеспечивающих формирование плоских полей. Для отыскания связи между полями в удаленных зонах и полями вблизи проводов применим лемму Лоренца (см., например, [1])

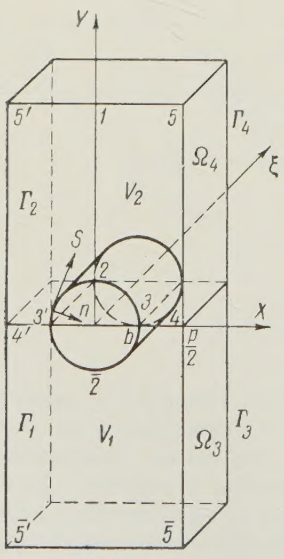


Рис. 2

$$\oint \{[EH^i]_n - [E^iH]_n\}\, ds = 0 \tag{4}$$

(n — направление внешней нормали) к поверхностям, заключающим объемы V_1 и V_2. В качестве вспомогательных полей, фигурирующих в лемме, возьмем поля плоских волн в свободном пространстве, причем направления распространения их выберем так, чтобы вспомогательные волны оказались «встречными» по отношению к истинным полям. Иными словами, поле E^1, H^1 (встречное поле по отношению к отраженной волне) есть поле волны, распространяющейся в положительном направлении оси y''; поле E^2, H^2 (встречное по отношению к прошедшей волне) есть поле волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси y'.

Из сказанного следует, что величины $[EH^i]_n$ и $[E^iH]_n$ не зависят от ξ, поэтому интегралы по площадям, лежащим в плоскостях $\xi = 0$ и $\xi = \xi_0$, в сумме дадут нуль. В результате получаем равенство нулю интегралов по контурам Γ_i, лежащим в плоскости $\xi = 0$*.

На вертикальных участках $\bar{5}'-5'$ и $\bar{5}-5$ выполняются соотношения

$$H\left(\frac{p}{2}\right) = H\left(-\frac{p}{2}\right)e^{-ik\alpha p},\quad E\left(\frac{p}{2}\right) = E\left(-\frac{p}{2}\right)e^{-ik\alpha p},\quad E^i\left(\frac{p}{2}\right) = E^i\left(-\frac{p}{2}\right)e^{ik\alpha p},$$

$$H^i\left(\frac{p}{2}\right) = H^i\left(-\frac{p}{2}\right)e^{ik\alpha p}. \tag{5}$$

Это приводит к исчезновению интеграла по вертикальным участкам. Учитывая, что на контуре провода тангенциальная составляющая электрического поля E_s равна нулю, приходим к искомым соотношениям, связывающим поля вдали с полями на контуре провода и на линии $y = 0$ между проводами:

$$\int\limits_{(5'-5)} (E_x^iH_\xi - E_xH_\xi^i)\,dx = \int\limits_{(3'-\bar{2}-3)} E_s^iH_\xi\,ds + \int\limits_{(4'-3'),(3-4)} (E_x^iH_\xi - E_xH_\xi^i)\,dx,$$

$$\int\limits_{(\bar{5}'-\bar{5})} (E_xH_\xi^i - E_x^iH_\xi)\,dx = \int\limits_{(3-\bar{2}-3')} E_s^iH_\xi\,ds - \int\limits_{(4'-3'),(3-4)} (E_x^iH_\xi - E_xH_\xi^i)\,dx. \tag{6}$$

Истинные поля в удаленных зонах и вспомогательные поля равны:

$$\text{для } y<0 \quad H_{\xi 1} = \sqrt{1-\gamma^2}\,(e^{-iky'} + Re^{iky''}),$$

$$\text{для } y>0 \quad H_{\xi 2} = \sqrt{1-\gamma^2}\,Te^{-iky'}, \tag{7}$$

$$H_\xi^1 = \sqrt{1-\gamma^2}\,e^{-iky''},\quad H_\xi^2 = \sqrt{1-\gamma^2}\,e^{iky'},$$

R и T — искомые коэффициенты отражения и прохождения. Подставляя (7) в (6), находим

$$\int\limits_{(3'-\bar{2}-3)} E_s^1H_\xi\,ds + \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)} (E_x^1H_\xi - E_xH_\xi^1)\,dx = 0,$$

$$\int\limits_{(3-\bar{2}-3')} E_s^1H_\xi\,ds - \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)} (E_x^1H_\xi - E_xH_\xi^1)\,dx = -2\beta pR,$$

$$\int\limits_{(3'-\bar{2}-3)} E_s^2H_\xi\,ds + \int\limits_{(4'-3')\,(3-4)} (E_x^2H_\xi - E_xH_\xi^2)\,dx = -2\beta pT, \tag{8}$$

$$\int\limits_{(3-\bar{2}-3')} E_s^2H_\xi\,ds - \int\limits_{(4'-3')\,(3-4)} (E_x^2H_\xi - E_xH_\xi^2)\,dx = 2\beta p.$$

Таким образом, коэффициенты R и T (т. е. поля в дальней зоне) ока-

* Вместо леммы Лоренца можно воспользоваться теоремой Грина в «чистом виде» и оперировать с потенциалами H_ξ и H_ξ^i; однако оба способа, по существу, мало отличаются друг от друга.

зались выраженными через поля на контуре провода c:

$$-2\beta pR = \oint_c E_s^1 H_\xi \, ds, \qquad 2\beta p(1-T) = \oint_c E_s^2 H_\xi \, ds. \tag{9}$$

2) Поля вблизи проводов. Найдем поля вблизи проводов решетки. Замена волнового уравнения (3) уравнением Лапласа приводит к ошибке порядка $(kp)^2$. Потому, если найдено решение уравнения $\nabla^2 H = 0$ с точностью до членов порядка $(kp)^2$, то можно считать, что оно представляет собой с той же точностью истинное поле. Как видно из (8), это решение будет использовано нами лишь на контуре провода и на линии $y = 0$ между проводами. Итак, будем искать квазистатическое решение, удовлетворяющее очевидным требованиям:

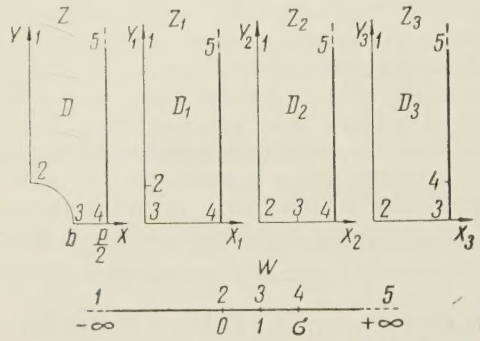


Рис. 3

1) величины H_ξ и $\partial H_\xi / \partial y$ непрерывны на $4' - 3'$ и на $3 - 4$;

2) $\partial H_\xi / \partial n = 0$ на контуре поперечного сечения провода.

Для определения вида решения осуществим конформные преобразования $z_1(z)$ и $z_2(z)$, переводящие области D_1 и D_2 плоскостей комплексных переменных $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ в область D комплексной переменной $z = x + iy$. Соответствие точек указано на рис. 3. Решение задачи во всей рассматриваемой области будем искать в виде

$$\begin{aligned} &\text{для } y \geqslant 0 \quad H_{\xi 2} = (A_2 + B_2 y_1)(1 + C_2 x_2), \\ &\text{для } y \leqslant 0 \quad H_{\xi 1} = (A_1 + B_1 y_1)(1 + C_1 x_2). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $y_1(x, y)$ и $x_2(x, y)$ — мнимая и реальная части преобразований z_1 и z_2; A_k, B_k, C_k — постоянные величины. Подчеркнем, что на участке $2-3$ $\partial y_1 / \partial n \sim \partial x_2 / \partial n = 0$. Определим функции y_1 и x_2 за границами области D из условий

$$\begin{aligned} &y_1(-x, y) = y_1(x, y), \; y_1(x, -y) = -y_1(x, y), \\ &x_2(-x, y) = -x_2(x, y), \; x_2(x, -y) = x_2(x, y). \end{aligned} \tag{11}$$

Подчиним решение поставленным условиям.

1) на участке $3-4$ $H_{\xi 2} = H_{\xi 1}$ и $y_1 = 0$. Это дает $A_1 - A_2 = (C_2 A_2 - C_1 A_1) x_2$, и так как $x_2 \neq \text{const}$, то это равенство возможно лишь при $A_1 = A_2$, $C_1 = C_2$ (обозначим $A_1 = A$, $C_1 = C$);

2) из непрерывности E_x на участке $3-4$ следует $B_1 = B_2$ (обозначим $B_1 = B$);

3) наконец, условия (5) позволяют легко получить $C = -ik\alpha$. В итоге, поле вблизи проводов можно представить через две постоянные A и B в виде

$$H_\xi = (A + By_1)(1 - ik\alpha x_2). \tag{12}$$

Величины A и B определяются из первого и четвертого уравнений (8). Ниже показано, что величина B — порядка kp, поэтому $\nabla^2 H$ — порядка $(kp)^2$, т. е. найденное решение с принятой точностью представляет истинное поле.

3) Вычисление искомых величин R, T, A, B. Теперь не представляет труда, используя соотношения (8) и (9) и найденные поля вблизи проводов, вычислить искомые величины. Пусть контур поперечного сечения провода задан уравнением $y = y(x)$. При вычислении интегралов по контуру провода экспоненты заменяем двумя первыми членами разложения по ky (вертикальные размеры провода полагаются малыми по сравнению с длиной волны).

В результате вычислений находим

$$A = \frac{\beta\sqrt{1-\gamma^2}}{\beta - ik[(1-\gamma^2)l + \alpha^2 L]}, \quad B = \frac{-ik\sqrt{1-\gamma^2}\beta}{1+ikp\Delta},$$

$$R = \frac{1}{2}\left\{\frac{\beta + ik[(1-\gamma^2)l + \alpha^2 L]}{\beta - ik[(1-\gamma^2)l + \alpha^2 L]} - \frac{1-ikp\bar{\Delta}}{1+ikp\Delta}\right\}, \tag{13}$$

$$T = \frac{1}{2}\left\{\frac{\beta + ik[(1-\gamma^2)l + \alpha^2 L]}{\beta - ik[(1-\gamma^3)l + \alpha^2 L]} + \frac{1-ikp\bar{\Delta}}{1+ikp\Delta}\right\}.$$

Здесь $l = S/2p$ (S — площадь поперечного сечения провода);

$$\Delta = \beta\Delta_1 - ikp(\beta^2\Delta_2 - \alpha^2\Delta_3);$$

$$\Delta_1 = \frac{2}{p^2}\int_0^b y_1\,dx;\quad \Delta_2 = \frac{2}{p^3}\int_0^b yy_1\,dx;\quad \Delta_3 = \frac{2}{p^3}\int_0^b (x-x_2)\,y_1y'\,dx;$$

$L = \frac{2}{p}\int_0^b x_2y'\,dx$ (подынтегральные функции берутся в точках контура, y' — производная функции $y(x)$, $2b$ — максимальный размер провода в направлении оси ox). Можно показать, что $\Delta_1 = l_1/p$, где l_1 определяется из конформного преобразования как предел:

$$l_1 = \lim_{y\to\infty}(y_1 - y). \tag{14}$$

4) Проверка предельных случаев. Очевидно, что найденные коэффициенты отражения и прохождения удовлетворяют закону сохранения энергии $R\bar{R} + T\bar{T} = 1$. При $q = 2b/p \to 0$ ($b \to 0$) $T \to 1$, $R \to 0$. Этот же предельный переход имеет место при $kp \to 0$ (иными словами, уменьшение периода ведет к возрастанию просачивания поля сквозь решетку).

Выясним поведение R и T при $q \to 1$ (переход к сплошному заполнению, т. е. к гофре). Для этого воспользуемся еще одним преобразованием, а именно, осуществим конформное преобразование верхней полуплоскости вспомогательной комплексной плоскости W (рис. 3) в область D_1 плоскости z_1 так, чтобы точки $-\infty$, 0, 1, σ, $+\infty$ действительной оси W переходили соответственно в точки *1*, *2*, *3*, *4*, *5* плоскости z_1. Преобразование записывается в виде

$$z_1 = \frac{p}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{W-1}{\sigma-1}}. \tag{15}$$

Параметр σ зависит от формы и относительных размеров провода. Для вычисления Δ нужно знать значения y_1 на участке *2* — *3*. На этом участке $0 \leqslant W \leqslant 1$, поэтому

$$y_1 = J_m z_1 = \frac{p}{\pi}\ln\frac{\sqrt{1-W} + \sqrt{\sigma - W}}{\sqrt{\sigma - 1}}. \tag{16}$$

При $q \to 1$ (провода неограниченно сближаются, $b \to p/2$) $\sigma \to 1$ и $y_1 \to \infty$ (напомним, что требования $ky_1 \ll 1$ не было, было только $ky \ll 1$). При этом из интегралов, определяющих Δ, выделяются главные члены,

стремящиеся к бесконечности. (Можно показать, что особенность выражения $\ln(\sqrt{1-W}+\sqrt{\sigma-W})$ в точке $W=1$ при $\sigma\to 1$ интегрируема):

$$\Delta_1 \simeq \frac{y_1}{p}, \quad \Delta_2 \simeq \frac{y_1}{p} l, \quad \Delta_3 \simeq -\frac{y_1}{p}(l+L),$$

$$\beta^2\Delta_2 - \alpha^2\Delta_3 \simeq \frac{y_1}{p}[(1-\gamma^2)l + \alpha^2 L]. \tag{17}$$

Подставляя это в формулы для R и T, находим для $q=1$

$$R = \frac{\beta + ik[(1-\gamma^2)l + \alpha^2 L]}{\beta - ik[(1-\gamma^2)l + \alpha^2 L]}. \tag{18}$$

При этом $T=0$, $|R| = 1$, что и следовало ожидать. При нормальном падении $\alpha=\gamma=0$, $\beta=1$. Формулу (18) для R в нашем приближении можно записать в виде

$$R = e^{ik\frac{S}{p}}. \tag{19}$$

Для прямоугольного провода эта формула, как и должно быть, дает набег фазы при простом сдвиге идеально проводящей плоскости в отрицательном направлении y. Таким образом, при нормальном падении плоской волны H-поляризации на плоскую гофрированную поверхность с гофрой произвольной формы набег фазы в коэффициенте отражения пропорционален площади сечения фигуры, образующей гофру.

5) Эквивалентные граничные условия. Полученные коэффициенты отражения и прохождения позволяют записать локальные граничные условия, эквивалентные действию решетки. Действительно, после вычисления R и T, согласно формулам (7) и (2), мы знаем истинные поля для областей, лежащих выше прямой $5'-5$ и ниже прямой $\bar{5}'-\bar{5}$ (напомним, что эти участки находятся от плоскости $y=0$ на расстояниях, достаточных для формирования полей плоских волн. Обычно эти расстояния порядка периода, так как поля местных волн быстро затухают при удалении от решетки). Если теперь мы продолжим поля до $y=0$, как поля плоских волн (помня, что это продолжение не представляет истинного поля), то тем самым введем при $y=0$ некую полупрозрачную бесконечно тонкую пленку, на которой определены скачки компонент поля.

Очевидно, что действие этой воображаемой пленки эквивалентно действию реальной решетки, поскольку сохраняются поля в удаленных зонах. Скачки составляющих поля можно при этом рассматривать как эквивалентные граничные условия, которые нужно ставить при $y=0$. Таким способом получаем следующие граничные условия для волн H-поляризации:

$$H_{\xi 2} - H_{\xi 1} = \frac{-ikl_1}{1+(kp)^2(\beta^2\Delta_2 - \alpha^2\Lambda_3)}\left[E_{x2} + E_{x1} + \frac{i}{k}\frac{\partial}{\partial\xi}(H_{y2} + H_{y1})\right],$$

$$E_{x2} - E_{x1} = ik\left[l(H_{\xi 2} + H_{\xi 1}) - \frac{i}{k}\frac{\partial}{\partial\xi}(E_{y2} + E_{y1})\right]. \tag{20}$$

Учет слагаемого порядка $(kp)^2$ в знаменателе первого граничного условия, так же, как и в формулах для R и T, имеет смысл при q, достаточно близком к единице, когда параметры Δ_2 и Δ_3 начинают существенно расти. Эти результаты представляют собой обобщение результатов статьи [2] (для $\varepsilon=1$) на случай, когда имеется зависимость полей от координаты ξ ($\partial\ldots/\partial\xi \neq 0$).

3. СЛУЧАЙ *E*-ПОЛЯРИЗАЦИИ ($H_\xi \equiv 0$)

В этом случае все составляющие поля можно выразить через составляющую электрического поля вдоль проводов следующим образом:

$$H_x = \frac{1}{ik(1-\gamma^2)}\frac{\partial E_\xi}{\partial y}, \qquad E_x = -\gamma H_y,$$
$$H_y = \frac{-1}{ik(1-\gamma^2)}\frac{\partial E_\xi}{\partial x}, \qquad E_y = \gamma H_x. \tag{21}$$

Сама же компонента E_ξ удовлетворяет уравнению $\nabla^2 E_\xi + k^2(1-\gamma^2)E_\xi = 0$ с граничным условием на контуре провода $E_\xi|_c = 0$.

1) Выражение полей в удаленных зонах через поля на контуре провода и на плоскости $y=0$. Применение леммы Лоренца к объемам V_1 и V_2 приводит здесь к соотношениям

$$\int\limits_{(5'-5)} (E^i_\xi H_x - E_\xi H^i_x)\,dx = \int\limits_{(3'-2-3)} E^i_\xi H_s\,ds + \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)} (E^i_\xi H_x - E_\xi H^i_x)\,dx,$$
$$\int\limits_{(5'-5)} (E_\xi H^i_x - E^i_\xi H_x)\,dx = \int\limits_{(3-2-3')} E^i_\xi H_s\,ds - \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)} (E^i_\xi H_x - E_\xi H^i_x)\,dx. \tag{22}$$

Истинные поля в удаленных зонах и вспомогательные поля равны:

$$\text{для } y>0 \quad E_{\xi 2} = T\sqrt{1-\gamma^2}\,e^{-iky'},$$
$$\text{для } y<0 \quad E_{\xi 1} = \sqrt{1-\gamma^2}\,(e^{-iky'} + Re^{iky''}),$$
$$E^1_\xi = \sqrt{1-\gamma^2}e^{-iky''},\quad E^2_\xi = \sqrt{1-\gamma^2}\;e^{iky'}. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (22), находим связь искомых коэффициентов R и T с полями на контуре провода:

$$\int\limits_{(3'-2-3)} E^1_\xi H_s\,ds + \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)} (E^1_\xi H_x - E_\xi H^1_x)\,dx = 0,$$
$$\int\limits_{(3-2-3')} E^1_\xi H_s\,ds - \int\limits_{(4'-3')\,(3-4)} (E^1_\xi H_x - E_\xi H^1_x)\,dx = 2\beta p R,$$
$$\int\limits_{(3'-2-3)} E^2_\xi H_s\,ds + \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)} (E^2_\xi H_x - E_\xi H^2_x)\,dx = -2\beta p T, \tag{24}$$
$$\int\limits_{(3-2-3')} E^2_\xi H_s\,ds - \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)} (E^2_\xi H_x - E_\xi H^2_x)\,dx = 2\beta p,$$

$$-2\beta p R = \oint\limits_c E^1_\xi H_s\,ds,$$

$$2\beta p(1-T) = \oint\limits_c E^2_\xi H_s\,ds. \tag{25}$$

2) Поля вблизи проводов. Поля вблизи проводов будем искать из решения электростатической задачи, которую можно сформулировать следующим образом. Нужно найти решение E_ξ уравнения Лапласа (с точностью до членов порядка $(kp)^2$), удовлетворяющее требованиям:

1) величины E_ξ и $\partial E_\xi/\partial y$ непрерывны на $4'-3'$, $3-4$;

2) $E_\xi = 0$ на контуре поперечного сечения провода. Подобная электростатическая задача решена в работе [3] для случая отсутствия зависимости полей от координаты ξ.

Для определения вида решения осуществим конформное преобразование $z_3(z)$, переводящее область D_3 плоскости $z_3 = x_3 + iy_3$ в область D комплексной плоскости $z = x + iy$ (рис. 3). Решение задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} &\text{для } y \geqslant 0 \quad E_{\xi 2} = (A_2 y_2 + B_2 y_3)(1 + C_2 x_2), \\ &\text{для } y \leqslant 0 \quad E_{\xi 1} = (A_1 y_2 + B_1 y_3)(1 + C_1 x_2). \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь $y_2(x, y)$ и $y_3(x, y)$ — мнимые части преобразований $z_2(z)$ и $z_3(z)$; $x_2(x, y)$ — реальная часть преобразования $z_2(z)$; A_n, B_n, C_n — постоянные. Определим функции y_2 и y_3 за границами области D из условий

$$\begin{aligned} y_2(-x, y) = y_2(x, y),\ y_2(x, -y) = -y_2(x, y), \\ y_3(-x, y) = y_3(x, y),\ y_3(x, -y) = y_3(x, y). \end{aligned} \tag{27}$$

Как и в случае H-поляризации, одна из функций продлевается за $y = 0$ симметрично, другая — асимметрично.

1) На участке $3-4$ $E_{\xi 2} = E_{\xi 1}$. Это дает $B_1 - B_2 = (B_1 C_1 - B_2 C_2) x_2$ откуда $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$ (обозначим $B_1 = B$, $C_1 = C$).

2) Из непрерывности H_x $\left(H_x = \dfrac{1}{ik(1-\gamma^2)} \dfrac{\partial E_\xi}{\partial y}\right)$ на $3-4$ следует $A_1 = A_2$ (обозначим $A_1 = A$).

3) Условия (5) по-прежнему дают $C = ik\alpha$. Таким образом, искомое поле вблизи проводов можно записать в виде

$$E_\xi = (Ay_2 + By_3)(1 - ik\alpha x_2). \tag{28}$$

Постоянные A и B определятся из первого и четвертого уравнений (24).

3) Вычисление величин A, B, R, T. Для вычисления A и B сложим и вычтем первое и четвертое уравнения (24). Получаем

$$\begin{aligned} &\int\limits_{(3'-2-3)} E_\xi^1 H_s\, ds + \int\limits_{(3-2-3')} E_\xi^2 H_s\, ds - 2 \int\limits_{(4'-3'),\ (3-4)} H_x^1 E_\xi\, dx = 2\beta p, \\ &-\int\limits_{(3'-2-3)} E_\xi^1 H_s\, ds + \int\limits_{(3-2-3')} E_\xi^2 H_s\, ds - 2 \int\limits_{(4'-3'),\ (3-4)} E_\xi^1 H_x\, dx = 2\beta p. \end{aligned} \tag{29}$$

На участках $4'-3'$ и $3-4$ $y_2 = 0$ и E_ξ можно представить в виде

$$E_\xi = By_3 e^{-ik\alpha x_2},\ H_x^1 = \frac{-\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}} e^{ik\alpha x}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{(4'-3'),\ (3-4)} H_x^1 E_\xi\, dx = \frac{-\beta B}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int\limits_{(4'-3'),\ (3-4)} y_3\, dx.$$

На этом же участке $\partial x_2 / \partial y = 0$ и $\partial y_3 / \partial y = 0$, откуда

$$H_x = \frac{A}{ik(1-\gamma^2)} \frac{\partial y_2}{\partial y}$$

и

$$\int\limits_{(4-3'),\ (3-4)} E_\xi^1 H_x\, dx = \frac{A}{ik(1-\gamma^2)} \int\limits_{(4'-3'),\ (3-4)} \frac{\partial y_2}{\partial y} dx.$$

Нам потребуется вычисление интегралов по контуру провода вида $\int E_\xi^i H_s\,ds$, но $H_s = \dfrac{-1}{ik(1-\gamma^2)}\dfrac{\partial E_\xi}{\partial n}$, а так как на контуре провода $y_2 = y_3 = 0$, то

$$\frac{\partial E_\xi}{\partial n} = \left(A\,\frac{\partial y_2}{\partial n} + B\,\frac{\partial y_3}{\partial n}\right)e^{-ik\alpha x_2},$$

$$\int E_\xi^i H_s\,ds = \frac{-1}{ik(1-\gamma^2)}\int E_\xi^i\left(A\,\frac{\partial y_2}{\partial n} + B\,\frac{\partial y_3}{\partial n}\right)e^{-ik\alpha x_2}dx.$$

Подставляя эти выражения в формулы (29), находим

$$B\left[\int\limits_{(3'-2-3)}\frac{\partial y_3}{\partial n}ds - ik\beta\left(\int\limits_{(3'-2-3)} y\,\frac{\partial y_3}{\partial n}ds + \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)} y_3\,dx\right)\right] = -ik\sqrt{1-\gamma^2}\,\beta p,$$

$$A\left[\int\limits_{(3'-2-3)}\frac{\partial y_2}{\partial n}ds - \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)}\frac{\partial y_2}{\partial y}dx - ik\beta\int\limits_{(3'-2-3)} y\,\frac{\partial y_2}{\partial n}ds\right] = ik\sqrt{1-\gamma^2}\,\beta p. \tag{30}$$

Вычислим интегралы в левых частях при помощи формулы Грина. Запишем условие равенства нулю интегралов по замкнутому контуру Γ_2 от функций $\partial y_2/\partial n$, $\partial y_3/\partial n$, $y\dfrac{\partial y_2}{\partial n} - y_2\dfrac{\partial y}{\partial n}$, $y\dfrac{\partial y_3}{\partial n} - y_3\dfrac{\partial y}{\partial n}$.

Для указанных конформных преобразований имеет место предельное соотношение $dz_i/dz \to 1$ $(i = 1; 2; 3)$ при $y \to \infty$, поэтому $y_i = y + l_i$. Используя это обстоятельство, находим

$$\int\limits_{(3'-2-3)}\frac{\partial y_3}{\partial n}ds = -p,\quad \int\limits_{(3'-2-3)}\frac{\partial y_2}{\partial n}ds - \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)}\frac{\partial y_2}{\partial y}dx = -p,$$

$$\int\limits_{(3'-2-3)} y\,\frac{\partial y_2}{\partial n}ds = pl_2,\quad \int\limits_{(3'-2-3)} y\,\frac{\partial y_3}{\partial n}ds + \int\limits_{(4'-3'),\,(3-4)} y_3\,dx = pl_3. \tag{31}$$

Подставляя (31) в (30), получаем A и B, т. е. поле вблизи проводов:

$$A = \frac{-ik\beta\sqrt{1-\gamma^2}}{1+ik\beta l_2},\quad B = \frac{ik\beta\sqrt{1-\gamma^2}}{1+ik\beta l_3}. \tag{32}$$

Теперь из формул (25) можно получить искомые коэффициенты отражения и прохождения:

$$R = -\frac{1}{2}\left[1 - 2ik\beta l_2 + \frac{1-ik\beta l_3}{1+ik\beta l_3}\right],$$

$$T = \frac{1}{2}\left[1 - 2ik\beta l_2 - \frac{1-ik\beta l_3}{1+ik\beta l_3}\right]. \tag{33}$$

Параметры l_i зависят от формы и относительных размеров провода. Формулы (33) допускают, в частности, оба предельных перехода ($q \to 0$, $q \to 1$). Далее показано, что при $q \to 0$ $l_2 \to 0$, $l_3 \to \infty$, поэтому $T \to 1$, $R \to 0$; при $q \to 1$ $l_2 \to l_3$, поэтому $T \to 0$, $R \to e^{-2ik\beta l_2}$.

4) Эквивалентные граничные условия. Найденные выражения для коэффициентов отражения и прохождения, как и в случае H-поляризации, позволяют записать граничные условия, эквивалентные действию реальной решетки, в следующем виде:

$$E_{\xi 2} - E_{\xi 1} = ikl_2\left[(H_{x2} + H_{x1}) - \frac{i}{k}\frac{\partial}{\partial\xi}(E_{y2} + E_{y1})\right],$$

$$E_{\xi 2} + E_{\xi 1} = ikl_3\left[(H_{x2} - H_{x1}) - \frac{i}{k}\frac{\partial}{\partial\xi}(E_{y2} - E_{y1})\right]. \tag{34}$$

Для частного случая решетки из ленточных проводов эти условия совпадают с граничными условиями, полученными в работе [4]. Граничные условия (20) и (34) могут быть использованы для анализа затухания и фазовых характеристик электромагнитных волн в спиральных волноводах с учетом периода, формы и относительных размеров провода для всего диапазона изменений параметра q (от решетки из очень тонких проводников до гофрированной поверхности).

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ. ПРОВОДА КРУГЛОГО И ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Для получения наиболее удобных формул, определяющих параметры l_i, осуществим конформные преобразования $z_i(W)$ $(i = 1; 2; 3)$, переводящие области D_i плоскостей комплексных переменных z_i в верхнюю полуплоскость плоскости комплексного переменного W (рис. 3). Эти преобразования можно представить в виде

$$z_1 = \frac{p}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{W-1}{\sigma-1}},$$
$$z_2 = \frac{p}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{W}{\sigma}}, \qquad (35)$$
$$z_3 = \frac{p}{\pi} \arcsin \sqrt{W}.$$

Соответствие точек указано на рис. 3. Формулы для вычисления l_2, l_3 можно представить в виде

$$l_i = l_1 + \lim_{\substack{y\to\infty \\ (W\to\infty)}} (y_i - y_1). \qquad (36)$$

Используя преобразования (35) для вычисления пределов, находим

$$l_2 = l_1 - \frac{p}{2\pi} \ln \frac{\sigma-1}{\sigma}.$$
$$l_3 = l_1 + \frac{p}{2\pi} \ln(\sigma-1). \qquad (37)$$

Формулы справедливы для проводов любой формы поперечного сечения. Воспользовавшись условиями Коши — Римана, можно показать, что параметр L, фигурирующий в формулах для H-поляризации, равен l_2.

1) Провода круглого поперечного сечения. Для решетки из круглых проводов можно использовать весьма точное преобразование Блоха [5]

$$z_1 = z - \frac{mb}{2\pi} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{p}(z+\lambda b)}{\sin \frac{\pi}{p}(z-\lambda b)}, \qquad (38)$$

где b — радиус провода; m и λ — параметры, зависящие от q. Для параметра l_1 получается формула

$$l_1 = \frac{m\lambda}{4} pq^2.$$

Используя преобразование $z_1(W)$, находим

$$\sigma = \operatorname{cth}^2 r,$$
$$r = \frac{\pi q}{2}\left[1 + \frac{m}{\pi} \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} q\lambda \operatorname{cth} \frac{\pi q}{2}\right)\right]$$

$\left(\text{здесь } r\frac{p}{\pi} \text{ — ордината точки } 2 \text{ на плоскости } z_1\right)$, откуда $l_2 = l_1 - \frac{p}{\pi} \ln \operatorname{ch} r$, $l_3 = l_1 - \frac{p}{\pi} \ln \operatorname{sh} r$.

При $q \to 0$ $r \to 0$, $\sigma \to \infty$, $l_1 \to \infty$, $l_2 \to 0$, $l_3 \to \infty$.
При $q \to 1$ $\lambda \to 1$, $r \to \infty$, $l_2 \to l_3 \to 0{,}45$.

В случае H-поляризации, нормального падения и тонкого провода ($q \ll 1$) использование преобразования Блоха приводит к формулам

$$R = 3ikl, \quad T = 1 - ikl, \tag{39}$$

совпадающим с формулами, полученными в работе [6]. Результаты Ламба [7], полученные для этого случая в акустической задаче о решетке из тонких круглых стержней, с тождественной постановкой, и Ганса [8] ошибочны. В их формулах оказался неучтенным кольцевой ток по периметру сечения провода, что привело к ошибке для коэффициента отражения в полтора раза.

2) Провода прямоугольного поперечного сечения. Ленточный провод. Для проводов прямоугольного сечения при помощи формулы Кристоффеля — Шварца можно получить преобразование $z(W)$ в виде

$$z = \frac{p}{2\pi} \int_0^W \frac{1}{\sqrt{U(1-U)}} \sqrt{\frac{U-t}{U-\sigma}}\, dU + ic. \tag{40}$$

Здесь $2c$ — размер провода в направлении оси oy. Параметры σ и t зависящие от относительных размеров провода, находятся из уравнений (5) и (6) работы [9]. Для некоторых значений относительных размеров провода в этой работе проведены вычисления σ и t. Из преобразования $z_1(W)$ и $z(W)$ по формуле $l_1 = \lim\limits_{W \to \infty} (y_1 - y)$ находим

$$l_1 = \frac{pt}{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sigma}} \frac{dU}{\sqrt{(1-U)(1-\sigma U)}\,(\sqrt{1-tU}+1)}. \tag{41}$$

Для ленточного провода ($c = 0$) плоскости z и z_2 совпадают,

$$l_2 = 0, \quad \sigma = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2} q}, \quad l_1 = \frac{p}{\pi} \ln \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} q}, \quad l_3 = \frac{p}{\pi} \ln \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2} q}.$$

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОТРАЖЕНИЯ И ПРОХОЖДЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Можно получить решение задачи в случае нормального падения волны на решетку еще одним более простым способом. Для этого воспользуемся записью уравнений Максвелла в интегральной форме.

1) H-поляризация. Здесь используем уравнения

$$\oint_{(\Gamma_1+\Gamma_2)} E_s\, ds = -ik \iint H_\xi\, ds, \tag{42}$$

$$\oint_{(\Gamma_3+\Gamma_4)} H_s\, ds = ik \iint E_x\, ds. \tag{43}$$

Для вычисления интегралов по площадям применим найденное статическое решение: $H_\xi = A + By_1$, $E_x = \frac{-B}{ik} \frac{\partial y_1}{\partial y}$. На вертикалях $\partial \ldots / \partial n = 0$. Из уравнения (42) сразу получаем

$$E_{x2} - E_{x1} = -ikA2y + ik \frac{S}{p} A. \tag{44}$$

Слагаемое $-ik2y$ представляет собой простой набег фазы между участками $\bar{5}' - \bar{5}$ и $5' - 5$. Второе слагаемое, пропорциональное площади, вытесненной решеткой, не учтено в формулах Лемба. Уравнение (43) дает

$$H_{\xi 2} - H_{\xi 1} = -B2y + B2l_1. \tag{45}$$

Разлагая решение в удаленных зонах по ky и приравнивая коэффициенты, находим

$$\left.\begin{matrix} R \\ T \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(1 + 2ikl \mp \frac{1 - ikl_1}{1 + ikl_1}\right),$$

$$A = 1 + ikl, \quad B = \frac{-ik}{1 + ikl_1}, \quad l = \frac{S}{2p}. \tag{46}$$

Граничные условия, соответствующие этим коэффициентам, будут иметь вид

$$H_{\xi 2} - H_{\xi 1} = -ikl_1(E_{x2} + E_{x1}),$$

$$E_{x2} = E_{x1} = ikl(H_{\xi 2} + H_{\xi 1}). \tag{47}$$

Формулы (46) и (47) справедливы для q, не слишком близких к единице, и не дают правильного предельного перехода при $q \to 1$. Это обстоятельство, по-видимому, является здесь следствием использования статического решения на достаточном удалении от решетки.

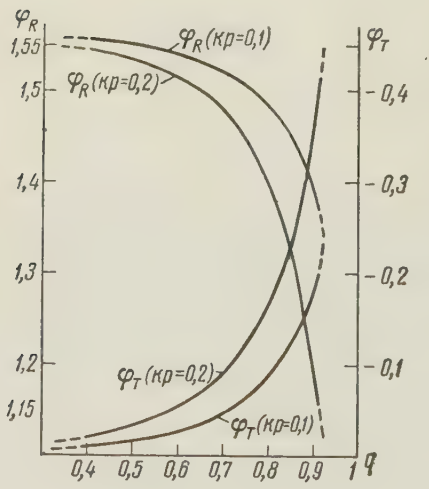


Рис. 4

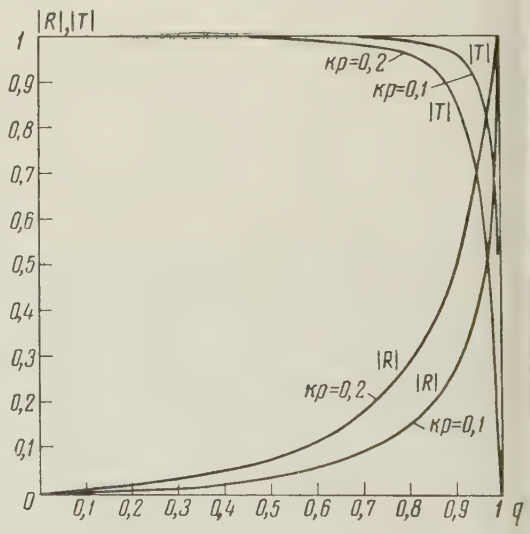


Рис. 5

В случае H-поляризации на контуре наблюдаются два типа токов: кольцевой (обязан постоянной A) и дипольный (обязан члену By_1). На верхней половине контура эти токи вычитаются, на нижней — складываются. Дипольный ток мал всегда, пока щели не очень малы. Этим объясняется очень хорошее прохождение H-поляризованной волны через решетку. На рис. 4, 5 изображены модули и фазы R и T, вычисленные для решетки из круглых проводов по точным формулам (13) для значений параметра $kp = 0{,}1;\ 0{,}2$.

2. *E*-поляризация. Здесь используем уравнение

$$\oint_{\Gamma_n} E_s ds = -ik \iint_{\Omega_n} H_x ds \quad (n = 3, 4). \tag{48}$$

Контуры Γ_n и площади Ω_n лежат в плоскости $x = p/2$. Для вычисления интегралов по площадям воспользуемся статическим решением $E_\xi = Ay_2 + By_3$, $H_x = \frac{A}{ik}\frac{\partial y_2}{\partial y} + \frac{B}{ik}\frac{\partial y_3}{\partial y}$. Получаем

$$\begin{aligned} E_{\xi 2} - E_{\xi 1} &= 2Al_2 + 2Ay, \\ E_{\xi 2} + E_{\xi 1} &= 2Bl_3 + 2By. \end{aligned} \tag{49}$$

Приравнивая коэффициенты при степенях y в (49) и в выражениях для поля «вдали», получаем формулы

$$\left.\begin{matrix} R \\ T \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(1 - 2ikl_2 \pm \frac{1 - ikl_3}{1 + ikl_3}\right), \tag{50}$$

являющиеся частным случаем формул (32) и (33).

Полученные в настоящей работе выражения для полей вблизи проводов дают возможность вычислить по общеизвестным формулам потери, связанные с неидеальностью проводников.

В заключение мне хочется выразить благодарность Б. З. Каценеленбауму за внимание, проявленное к работе, и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1956, стр. 418.
2. А. Н. Сивов, Падение плоской электромагнитной волны на плоскую решетку (случай, когда вектор **H** параллелен проводам), Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 1, 58.
3. Б. З. Каценеленбаум, Затухание волн H_{0n} в спиральном волноводе, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 3, 428.
4. Н. Н. Смирнов, Распространение электромагнитных волн в круглых волноводах с периодическими щелями, ЖТФ, 1958, **28**, 7, 1494.
5. Э. Блох, Исследование плоской решетки, составленной из теоретических профилей конечной толщины, Тр. ЦАГИ, 1947, № 611.
6. Б. З. Каценеленбаум, Определение коэффициента отражения электромагнитной волны в прямоугольном волноводе от тонкого металлического стержня, перпендикулярного электрическому полю, Изв. вузов МВО СССР (Радиотехника), 1960, 5.
7. Г. Ламб, Гидродинамика, ГИТТЛ, 1947, стр. 673.
8. Von R. Gans, Das verhalten Hertzceher Gitter, Ann. Physik, 1920, **61**, 5, 447.
9. В. В. Малин, А. Н. Сивов, К теории распространения волны H_{01} в спиральном волноводе, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 3, 433.

Поступила в редакцию
23 VII 1960

ФЛУКТУАЦИИ В АВТОГЕНЕРАТОРАХ

С. И. Евтянов, В. Н. Кулешов

Методом укороченных символических уравнений найдены общие выражения, отображающие воздействие малого аддитивного шумового тока на амплитуду и фазу синусоидальных колебаний автогенератора с любым числом степеней свободы. На основании этих выражений построена линейная эквивалентная схема для флуктуаций.

Приведенная эквивалентная схема пригодна для исследования локальной устойчивости стационарных режимов.

ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы — получение общих формул для расчета флуктуаций в автогенераторах синусоидальных колебаний. Общая методика расчета флуктуаций в таких генераторах развита в ряде статей [1—5]. Тем не менее, насколько нам известно, до сих пор в литературе нет работ, в которых выражения для статистических характеристик колебаний в широком классе автогенераторов были бы получены в замкнутой форме.

Ниже мы получим такие выражения для автогенератора, содержащего электронную лампу и четырехполюсник обратной связи в виде системы контуров с малым затуханием. В этом случае поведение автогенератора удобно исследовать, пользуясь методом укороченных символических уравнений [6]. В работе [7] этот метод был применен для расчета флуктуаций в одноконтурных автогенераторах. Теперь мы обобщим его на случай любого числа контуров.

При выводе формул не учитывается влияние реакции анода и сеточного тока. Смещение на сетке считается либо постоянным, либо автоматическим, но безынерционным.

1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФЛУКТУАЦИЙ

Обозначим через $\dot{I}$ и $\dot{U}$ комплексные амплитуды первой гармоники анодного тока и управляющего напряжения, а через φ — возможный сдвиг фаз между автоколебанием и колебанием на некоторой опорной частоте ω_0:

$$\dot{I} = Ie^{i\varphi}, \tag{1}$$

$$\dot{U} = Ue^{i\varphi}. \tag{2}$$

Если частота ω_0 выбрана в пределах полосы пропускания четырехполюсника обратной связи, то амплитуды I и U и фаза φ будут медленно меняющимися функциями времени. Фазы первых гармоник тока и напряжения предполагаются одинаковыми, т. е. инерция электронов в лампе не учитывается.

Связь между амплитудами первых гармоник анодного тока и управляющего напряжения определяется колебательной характеристикой автогенератора

$$I = I(U). \tag{3}$$

Вид ее зависит от формы статической характеристики лампы, смещения на сетке или параметров ячеек безынерционного автосмещения.

С другой стороны, комплексные амплитуды $\dot{I}$ и $\dot{U}$ связаны укороченным символическим уравнением

$$y(p)\dot{U} = \dot{I}. \tag{4}$$

Здесь $y(p)$ — управляющая символическая проводимость. Она получается после укорачивания выражения $y(i\omega_0 + p)$, если считать, что $p = i\Omega$, где Ω — малая расстройка относительно ω_0 [6].

Предположим теперь, что в анодной цепи к току $\dot{I}$ добавляется шумовой ток. Его также можно характеризовать комплексной амплитудой $\dot{I}_ш$, имея в виду разложение на два квадратурных колебания со случайными амплитудами

$$\dot{I}_ш = I_а + iI_р. \tag{5}$$

Здесь $I_а$ и $I_р$ — активная и реактивная составляющие шумового тока. Этим составляющим мы будем приписывать энергетические спектры $\overline{I^2_{а\Omega}}$ и $\overline{I^2_{р\Omega}}$. С учетом шумового тока уравнение (4) примет вид

$$y(p)\dot{U} = \dot{I} + \dot{I}_ш. \tag{6}$$

Решение этого уравнения ищется, как и в [7], с точностью до величин порядка квадрата флуктуаций амплитуды и фазы в виде

$$\dot{I} = (I + I_ф + iI\varphi_ф)e^{i\varphi}, \tag{7}$$

$$\dot{U} = (U + U_ф + iU\varphi_ф)e^{i\varphi}. \tag{8}$$

Здесь I и U — стационарные амплитуды первой гармоники тока и напряжения автоколебания; φ — стационарная разность фаз между автоколебанием и колебанием с частотой ω_0 может быть либо постоянной, либо линейной функцией времени:

$$\varphi = \Delta\omega t + \varphi_0. \tag{9}$$

В последнем случае имеет место разница между частотой автоколебаний и частотой ω_0 на $\Delta\omega$ (поправка на частоту).

В (7) и (8) через $I_ф$, $U_ф$ и $\varphi_ф$, как и в [7], обозначены флуктуационные добавки к амплитудам и фазе автоколебаний.

Чтобы определить стационарный режим, положим сначала $I_ф = 0$, $U_ф = 0$, $\varphi_ф = 0$ и подставим (7), (8) в (4). Учитывая (9) и пользуясь теоремой смещения, получим следующее уравнение:

$$y(p + i\Delta\omega)U = I. \tag{10}$$

Разделим $y(p + i\Delta\omega)$ на вещественную и мнимую части:

$$y(p + i\Delta\omega) = y_в(p + i\Delta\omega) + iy_м(p + i\Delta\omega) \tag{11}$$

и подставим (11) в (10), полагая $p = 0$. Получатся уравнения стационарного режима

$$y_в(i\Delta\omega)U = I, \tag{12}$$

$$y_м(i\Delta\omega) = 0. \tag{13}$$

Вместе с уравнением (3) они определяют значения U, I и $\Delta\omega$. Далее можно получить уравнения для флуктуаций, если подставить (5), (7) и (8) в (6) и иметь в виду равенства (11), (12), (13):

$$y_в(p + i\Delta\omega)U_ф - \dot{I}_ф - y_м(p + i\Delta\omega)U\varphi_ф = I_а, \tag{14}$$

$$y_м(p + i\Delta\omega)U_ф + y_в(p + i\Delta\omega)U\varphi_ф - I\varphi_ф = I_р. \tag{15}$$

Если обозначить через S среднюю крутизну колебательной характеристики, а через σ — ее локальную крутизну в точке стационарного режима, то уравнения связи между U и I и между U_Φ и I_Φ [7] можно представить в виде

$$I = SU, \tag{16}$$

$$I_\Phi = \sigma U_\Phi. \tag{17}$$

Пользуясь ими и вводя обозначения

$$g = S - \sigma, \tag{18}$$

$$Y_{22}(p) = y_в(p + i\Delta\omega) - S, \tag{19}$$

$$Y_{11}(p) = Y_{22}(p) + g, \tag{20}$$

$$Y_{12}(p) = y_м(p + i\Delta\omega). \tag{21}$$

получим уравнения для флуктуаций в окончательной форме:

$$Y_{11}(p)\,U_\Phi - Y_{12}(p)\,U\varphi_\Phi = I_a, \tag{22}$$

$$Y_{12}(p)\,U_\Phi + Y_{22}(p)\,U\varphi_\Phi = I_p. \tag{23}$$

3. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ФЛУКТУАЦИЙ И РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ (22), (23)

Уравнения (22), (23) являются символическими уравнениями линейного четырехполюсника в y-параметрах. Схема его изображена на рис. 1. Глядя на эту эквивалентную схему, можно предсказать свойства решения уравнений (22), (23).

Во-первых, сразу видно, что флуктуации амплитуды и фазы определяются обеими составляющими шумового тока I_a и I_p, если только не выполняется тождество $Y_{12}(p) \equiv 0$. Если это условие выполняется, то уравнения (22), (23) становятся независимыми:

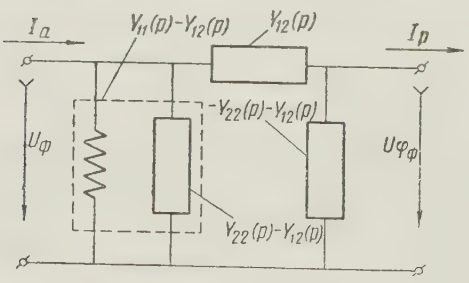


Рис. 1. Эквивалентная схема автогенератора для флуктуаций

$$Y_{11}(p)\,U_\Phi = I_a, \tag{24}$$

$$Y_{22}(p)\,U\varphi_\Phi = I_p, \tag{25}$$

и эквивалентная схема рис. 1 распадается на две схемы. При этом и из схемы и из уравнений (24), (25) видно, что флуктуации амплитуды будут определяться только током I_a, а флуктуации фазы — только током I_p.

Во-вторых, бросается в глаза несимметричность эквивалентной схемы рис. 1. Вход ее со стороны, где приложено напряжение U_Φ, шунтирован активной проводимостью g. Чтобы понять смысл этой асимметрии, посмотрим, каков характер проводимостей $Y_{22}(p)$ и $Y_{12}(p)$. Из (19), (12) и (21), (13) видно, что при $p \to 0$ $Y_{22}(p) \to 0$ и $Y_{12}(p) \to 0$. Это значит, что в области низких частот обе проводимости имеют емкостный характер. Поэтому со стороны входа, где приложено напряжение $U\varphi_\Phi$, при питании его током будет происходить накопление заряда, и средний квадрат $U\varphi_\Phi$ будет неограниченно расти. Этот результат полезно сравнить с тем, что получено в [7]. Сам по себе он не нов и означает лишь, что случайные уходы фазы, вызванные действием шума, не восстанав-

иваются. По аналогии с простейшим случаем можно ожидать диффу-ионного закона набега фазы в автогенераторе. Со стороны, где прило-кено напряжение U_Φ, такого накопления быть не может, так как есть точка g. Поэтому и средний квадрат флуктуаций амплитуды ограничен.

Наконец, та же эквивалентная схема рис. 1 позволяет весьма на-лядно найти выражение для энергетических спектров напряжений U_Φ $U\varphi_\Phi$ через энергетические спектры токов I_a и I_p. Для этого нужно ассчитать комплексные частотные характеристики переходных сопро-ивлений от I_a и I_p к U_Φ и $U\varphi_\Phi$. Предварительно найдем символические ыражения для напряжений U_Φ и $U\varphi_\Phi$ через токи I_a и I_p. Их можно олучить либо непосредственно из схемы рис. 1, либо путем решения равнений (22), (23). Обозначим определитель этой системы через

$$\Delta(p) = Y_{11}(p)\,Y_{22}(p) + Y_{12}^2(p). \tag{26}$$

Запишем выражения для U_Φ и $U\varphi_\Phi$ в виде

$$U_\Phi = \frac{Y_{22}(p)\,I_a - Y_{12}(p)\,I_p}{\Delta(p)},$$
$$U\varphi_\Phi = \frac{Y_{11}(p)\,I_p + Y_{12}(p)\,I_a}{\Delta(p)}. \tag{27}$$

Заменяя в (27) p на $i\Omega$, получим нужные нам комплексные частотные характеристики.

Заметим, что если в первом из уравнений (27) положить $I_a = 0$ и $I_p = 0$, то можно получить дифференциальное уравнение ($p = d/dt$) отно-ительно U_Φ. В нем U_Φ следует рассматривать как малое возмущение мплитуды относительно стационарного значения. Если далее отбросить U_Φ и считать p характеристическим показателем, то получим характери-тическое уравнение для исследования локальной устойчивости стацио-арного режима

$$\Delta(p) = 0. \tag{28}$$

Это выражение является другой формой записи общего характеристи-еского уравнения для случая безынерционного автосмещения, полу-енного Се Си в работе [8].

Если иметь в виду дробовой шум, то составляющие I_a и I_p некор-елированы и взаимный спектр их равен нулю. Поэтому энергетические пектры $\overline{U_{\Phi\Omega}^2}$ и $\overline{\varphi_{\Phi\Omega}^2}$ получаются наложением энергетических спектров $\overline{I_{a\Omega}^2}$ и $\overline{I_{p\Omega}^2}$, преобразованных частотными характеристиками соответствую-щих переходных сопротивлений:

$$\overline{U_{\Phi\Omega}^2} = \frac{|Y_{22}(i\Omega)|^2\,\overline{I_{a\Omega}^2} + |Y_{12}(i\Omega)|^2\,\overline{I_{p\Omega}^2}}{|\Delta(i\Omega)|^2}, \tag{29}$$

$$\overline{\varphi_{\Phi\Omega}^2} = \frac{1}{U^2}\,\frac{|Y_{11}(i\Omega)|^2\,\overline{I_{p\Omega}^2} + |Y_{12}(i\Omega)|^2\,\overline{I_{a\Omega}^2}}{|\Delta(i\Omega)|^2}. \tag{30}$$

Более того, как показано в [3], для дробового шума можно считать, что $\overline{I_{a\Omega}^2} = \overline{I_{p\Omega}^2} = \overline{I_{m\Omega}^2}$, где $\overline{I_{m\Omega}^2}$ — спектральная плотность дробового шума, и еще упростить формулы (29), (30).

Зная спектры флуктуаций (29), (30), можно рассчитать средние квад-

раты флуктуаций амплитуды и частоты:

$$\overline{U_\Phi^2} = \int_0^\infty \overline{U_{\Phi\Omega}^2}\, d\Omega,$$

$$\overline{\omega_\Phi^2} = \overline{\left[\frac{d\varphi_\Phi}{dt}\right]^2} = \int_0^\infty \Omega^2 \overline{\varphi_{\Phi\Omega}^2}\, d\Omega. \tag{31}$$

Формулы для спектров позволяют также вычислить средний квадрат флуктуационного набега фазы

$$\overline{\Delta\varphi_\tau^2} = \overline{[\varphi(t) - \varphi(t-\tau)]^2}.$$

Выражение для $\overline{\Delta\varphi_\tau^2}$ через $\overline{\varphi_{\Phi\Omega}^2}$ получим способом, предложенным в отчете Г. А. Елкина и М. И. Родак [9]. Спектр разности $[\varphi(t) - \varphi(t-\tau)]$ получается на выходе линейного четырехполюсника, состоящего из линии задержки и вычитателя (рис. 2). Передаточная функция его имеет вид

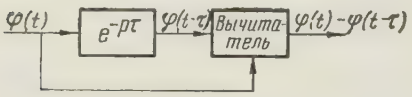


Рис. 2. К расчету среднеквадратичного набега фазы автоколебаний за время τ

$$K(p) = 1 - e^{-p\tau}.$$

Из нее легко получить квадрат модуля частотной характеристики этого четырехполюсника

$$|K(i\Omega)|^2 = 2(1 - \cos\Omega\tau).$$

Таким образом, для среднего квадрата флуктуационного набега фазы получим

$$\overline{\Delta\varphi_\tau^2} = \int_0^\infty \overline{\varphi_{\Phi\Omega}^2}\, |K(i\Omega)|^2\, d\Omega = 2\int_0^\infty \overline{\varphi_{\Phi\Omega}^2}\,(1 - \cos\Omega\tau)\, d\Omega. \tag{32}$$

Для любого автогенератора, имеющего колебательную систему с сосредоточенными постоянными, спектр флуктуаций фазы (30) можно представить в виде

$$\overline{\varphi_{\Phi\Omega}^2} = \frac{H}{\Omega^2} + \frac{A(\Omega^2)}{B(\Omega^2)}, \tag{33}$$

где H — некоторая постоянная; $A(\Omega^2)$ и $B(\Omega^2)$ — полиномы от Ω^2, причем степень полинома $A(\Omega^2)$ ниже степени $B(\Omega^2)$ и $B(0) \neq 0$. Если подставить (33) в (32) и выполнить интегрирование по Ω, то получим

$$\overline{\Delta\varphi_\tau^2} = \pi H\tau + \psi(\tau), \tag{34}$$

где $\psi(\tau)$ — некоторая функция, экспоненциально стремящаяся к нулю с ростом τ. Из (34) ясно, что коэффициент диффузии фазы D легко выражается через постоянную H:

$$D = \pi H. \tag{35}$$

Из выражений (33) и (35) следует чрезвычайно простая формула для вычисления коэффициента диффузии фазы автоколебаний по формуле для спектра флуктуаций фазы:

$$D = \pi \lim_{\Omega\to 0} \Omega^2 \overline{\varphi_{\Phi\Omega}^2}. \tag{36}$$

Подставляя (30) в (36), можно получить еще более простое равенство

$$D = \pi \frac{\overline{I^2_{p\Omega}}}{U^2} \lim_{\Omega \to 0} \frac{\Omega^2}{|Y_{22}(i\Omega)|^2}. \qquad (37)$$

Пример 1. Двухконтурный автогенератор. Проведем расчет флуктуаций в автогенераторе, схема которого изображена на рис. 3. Контуры считаем одинаковыми, связь между ними — слабой. Введем обозначения:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{L(C + C_{св})},$$
$$\beta = \omega_0 C_{св} R, \quad y_0 = 1/\beta R,$$
$$T = 2R(C + C_{св}),$$
$$p_1 = pT, \quad \nu = \Omega T.$$

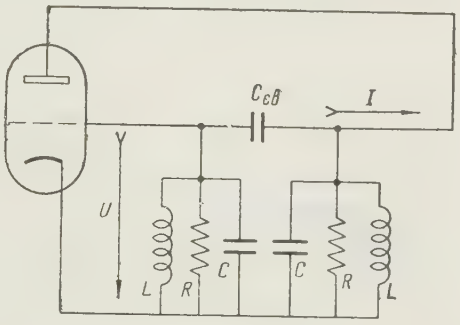


Рис. 3. Схема двухконтурного автогенератора

Введение безразмерного оператора p_1 и безразмерной частоты ν уменьшает громоздкость вычислений. Укороченная управляющая проводимость, записанная относительно опорной частоты ω_0, имеет вид

$$\varphi(p_1) = iy_0[(1 + p_1)^2 + \beta^2]. \qquad (38)$$

Расчет флуктуаций начинается с определения стационарного режима. Положим $p_1 = i\alpha$, где $\alpha = \Delta\omega T$, и воспользуемся условиями (12), (13) для стационарного режима. Получим

$$\alpha = \pm\sqrt{1 + \beta^2}, \qquad (39)$$

$$-2y_0\alpha = S. \qquad (40)$$

Из (40) следует, что в (39) нужно сохранить нижний знак, т. е. из двух собственных частот колебательной системы автогенератор выбирает нижнюю.

По формулам (19), (20), (21) находим элементы эквивалентной схемы (рис. 1)

$$Y_{22}(p_1) = -2y_0\alpha p_1,$$
$$Y_{11}(p_1) = -2y_0\alpha p_1 + g, \qquad (41)$$
$$Y_{12}(p_1) = y_0 p_1 (p_1 + 2).$$

Определим, при каких значениях локальной крутизны σ и фактора связи β автоколебания устойчивы, так как только при этих значениях σ и β расчет флуктуаций имеет смысл. Заменяя согласно (18) g на $S - \sigma$ и согласно (40) S/y_0 на -2α, на основании (28), (26) и (41) запишем характеристическое уравнение

$$p_1^3 + 4p_1^2 + 4(1 + \alpha^2)p_1 + 2\alpha\left(2\alpha + \frac{\sigma}{y_0}\right) = 0. \qquad (42)$$

Пользуясь критерием Гурвица, определяем область устойчивости автоколебаний в плоскости $(\beta; \sigma/y_0)$ рис. 4. На этом рисунке область устойчивости для автогенератора рис. 3 ограничена сплошными линиями. Штриховка направлена в сторону области устойчивости. О пунктирной границе на рис. 4 речь пойдет в примере 2.

Исследование миграции корней характеристического уравнения при пересечении границ области устойчивости на плоскости (β; σ/y_0) позволяет сделать некоторые замечания об изменении при этом режима автогенератора. Если пересекается верхняя граница (вещественный корень проходит через нуль), то происходит скачок из рассматриваемого режима в какой-либо другой (в частности, в состояние покоя). Если же пересекается нижняя граница (проходит через нуль вещественная часть комплексно-сопряженных корней), то возникает бигармонический режим.

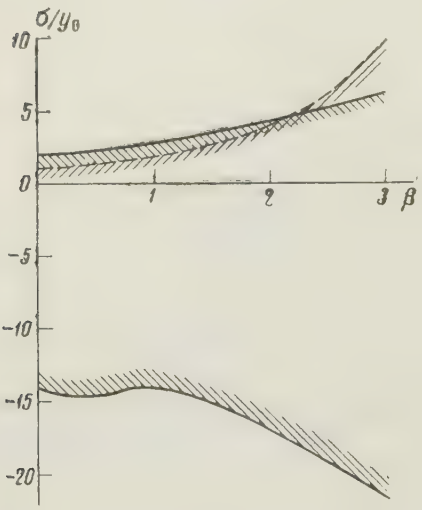


Рис. 4

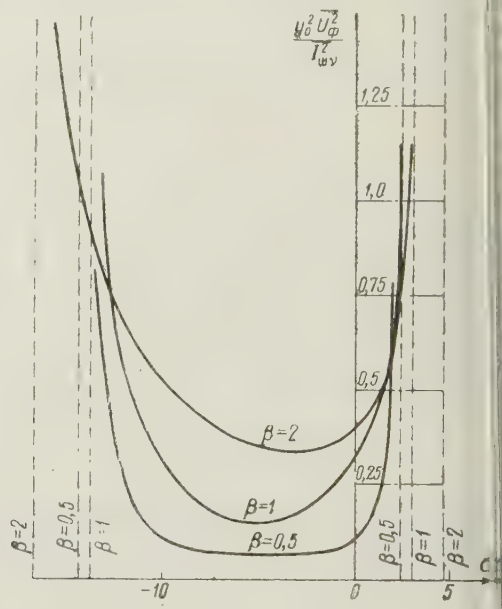


Рис. 5

Рис. 4. Границы устойчивости:

сплошная линия — для схемы автогенератора рис. 3; пунктир — для той же схемы, но со сдвигом фазы в цепи обратной связи на $-\pi/2$

Рис. 5. Зависимость среднего квадрата флуктуаций амплитуды двухконтурного генератора рис. 3 от локальной крутизны σ/y_0 при разных значениях фактора связи между контурами β

На основании (29), (30) и (41) запишем выражения для спектров флуктуаций, вызванных дробовым током. При этом, как говорилось выше, можно считать $\overline{I^2_{\text{а}\nu}} = \overline{I^2_{\text{р}\nu}} = \overline{I^2_{\text{ш}\nu}}$, где $\overline{I^2_{\text{а}\nu}}$, $\overline{I^2_{\text{р}\nu}}$ и $\overline{I^2_{\text{ш}\nu}}$ — спектральные плотности по безразмерной частоте.

$$\overline{U^2_{\text{ф}\nu}} = \frac{\overline{I^2_{\text{ш}\nu}}}{y_0^2} \frac{\nu^2 + 4(1+\alpha^2)}{|\Delta(i\nu)|^2},$$

$$\overline{\varphi^2_{\text{ф}\nu}} = \frac{\overline{I^2_{\text{ш}\nu}}}{y_0^2 U^2 \nu^2} \frac{\nu^4 + 4(1+\alpha^2)\nu^2 - \left(2\alpha + \frac{\sigma}{y_0}\right)}{|\Delta(i\nu)|^2},$$

где

$$|\Delta(i\nu)|^2 = \nu^6 - 8\beta^2\nu^4 + 16\left(1 - \alpha\frac{\sigma}{y_0} + \alpha^4\right)\nu^2 + 4\alpha^2\left(2\alpha + \frac{\sigma}{y_0}\right)^2.$$

По первой из этих формул можно рассчитать, каким образом меняется средний квадрат флуктуаций амплитуды внутри области устойчивости при изменении локальной крутизны колебательной характеристики σ и фактора связи между контурами β. Такие зависимости построены на рис. 5.

о оси абсцисс отложено отношение локальной крутизны колебательной арактеристики к проводимости y_0, по оси ординат — отношение среднего вадрата флуктуаций амплитуды к среднему квадрату напряжения, наво-имого шумовым током на сопротивления $1/y_0$ в полосе $1/T$.

Из этих кривых ясно, что резкий рост флуктуаций наблюдается только непосредственной близости к границам устойчивости. Внутри этой бласти средний квадрат $\overline{U_\Phi^2}$ меняется достаточно медленно. С увеличе-ием β растет средний квадрат амплитудных флуктуаций, и изменение его нутри области устойчивости становится более резким. При этом движение о оси σ/y_0 в сторону границы устойчивости, за которой начинается би-армонический режим, сопровождается более быстрым ростом флуктуа-ий, чем движение в сторону срыва колебаний.

Аналогичные кривые можно построить и для среднего квадрата флук-уаций частоты. Они будут отличаться от графиков для амплитуды тем, то при движении к границе срыва колебаний средний квадрат флуктуа-ий частоты стремится к некоторой конечной величине, а при движении границе бигармонического режима — к бесконечности.

Однако, как правило, нас эти величины интересуют меньше, чем коэф-ициент диффузии фазы, который определяет естественную ширину ли-ии генератора. Его можно вычислить по формуле (37), однако следует омнить, что введены безразмерные частота и время, и коэффициент диф-рузии получится безразмерным:

$$DT = \pi \overline{\frac{I_{\text{ш}\nu}^2}{U^2}} \frac{1}{4y_0^2\alpha^2}.$$

Заменяя U на I/S согласно (16), учитывая (40) и переходя к размерным ремени и частоте, получим

$$D = \pi \overline{\frac{I_{\text{ш}\Omega}^2}{I^2}} (\Delta\Omega)^2, \qquad (43)$$

где I — стационарная амплитуда первой гармоники анодного тока; $\Delta\Omega = 1/T$ — полоса одного из контуров.

Выражение (43) совпадает с формулой для коэффициента диффузии дноконтурного автогенератора, приведенной в [7]. Отсюда следует, что данном случае добавление второго контура не меняет коэффициента диф-рузии фазы. В конце примера 2 мы попытаемся пояснить этот результат изически.

Пример 2. Двухконтурный автогенератор с азовращателем. Представляет интерес рассмотреть вопрос о лиянии фазовых сдвигов в цепи обратной связи на локальную устойчи-вость и флуктуации в рассмотренном выше автогенераторе. Здесь мы об-удим один частный случай, иллюстрирующий возможность значительного изменения свойств двухконтурного генератора введением фазового сдви-га.

Предположим, что в цепь сетки автогенератора (рис. 3) включен фазо-ращатель, дающий фазовый сдвиг — $\pi/2$ и имеющий единичный коэффи-иент передачи по амплитуде.

Тогда вместо (38) в тех же обозначениях получим

$$y(p_1) = y_0[(1 + p_1)^2 + \beta^2].$$

Условия стационарного режима (12), (13) дают

$$\alpha = 0,$$

$$S = y_0(1 + \beta^2). \qquad (44)$$

Поправка на частоту в этом автогенераторе равна нулю и частота авто-колебаний равна собственной частоте одного из контуров.

Коэффициенты при всех степенях p_1 вещественны и поэтому

$$Y_{12}(p_1) = 0, \tag{45}$$

т. е. эквивалентная схема рис. 1 распадается на две отдельные. При помощи (19), (20) определим их элементы

$$Y_{11} = y_0 p_1 (2 + p_1) + g,$$

$$Y_{22} = y_0 p_1 (2 + p_1). \tag{46}$$

Характеристическое уравнение в соответствии с (28), (26) и (44) таково:

$$p_1^2 + 2p_1 + \left[1 + \beta^2 - \frac{\sigma}{y_0}\right] = 0. \tag{47}$$

Из (47) видно, что имеет место только одно условие устойчивости, соответствующее пунктирной границе на рис. 4. При переходе через эту границу происходит скачок амплитуды. Второй границы устойчивости в области больших отрицательных σ, как видим, нет, и значит бигармонический режим в таком генераторе невозможен. Подробное пояснение причин этого факта выходит за рамки настоящей статьи.

Обратимся к расчету спектров флуктуаций. В соответствии с (29), (30) и (45), (46) получим

$$\overline{U_{\text{ф}\nu}^2} = \frac{\overline{I_{\text{ш}\nu}^2}}{y_0^2} \frac{1}{\nu^4 + \left(3 - \beta^2 + \frac{\sigma}{y_0}\right)\nu^2 + \left(1 + \beta^2 - \frac{\sigma}{y_0}\right)^2},$$

$$\overline{\varphi_{\text{ф}\nu}^2} = \frac{\overline{I_{\text{ш}\nu}^2}}{y_0^2 U^2 \nu^2} \frac{1}{\nu^2 + 4}.$$

Построение зависимостей средних квадратов флуктуаций амплитуды и частоты от σ/y_0 в этом случае несложно и мы его делать не будем. Рассчитаем лишь коэффициент диффузии. В соответствии с (37) безразмерный коэффициент диффузии таков:

$$DT = \pi \frac{\overline{I_{\text{ш}\nu}^2}}{U^2} \frac{1}{4y_0^2}.$$

Замена $U = I/S$, учет равенства (44) и переход к размерным времени и частоте дают

$$D = \pi \frac{\overline{I_{\text{ш}\Omega}^2}}{I^2} (\Delta\Omega)^2 \frac{1 + \beta^2}{4}. \tag{48}$$

Сравним величины коэффициентов диффузии в автогенераторах примеров 1 и 2 при одинаковых полосах $\Delta\Omega$ парциальных контуров и одинаковых амплитудах автоколебаний, т. е. одинаковых S.

Из условия равенства средних крутизн (40) и (44) можно каждому β схемы примера 1 поставить в соответствие два значения β в схеме примера 2. Одно из них всегда меньше единицы. Поэтому, как следует из (43) и (48), в схеме примера 2 всегда можно получить уменьшение коэффициента диффузии в 2—4 раза по сравнению со схемой примера 1. Причина этого, по-видимому, заключается в том, что при $\beta < 1$ шумовая полоса четырехполюсника обратной связи уже, чем шумовая полоса одиночного контура. Однако в предыдущем генераторе при $\beta < 1$ шумовая полоса такая же, а уменьшения коэффициента диффузии с уменьшением β не наблюдалось. Причина этого кроется в том, что в генераторе рис. 3 с изменением β меняются частота автоколебаний и фаза коэффициента обратной связи, и увеличение коэффициента диффузии, вызванное их изменением, компенси-

рует уменьшение его за счет уменьшения шумовой полосы. В примере 2 с изменением β частота автоколебаний не меняется, значит фазовые соотношения в стационарном режиме не меняются, и поэтому выигрыш в коэффициенте диффузии за счет уменьшения шумовой полосы проявляется в чистом виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л Бернштейн, Флуктуации в автоколебательной системе и определение естественной размытости частоты лампового генератора, ЖТФ, 1941, **11**, 4, 305.
2. И С. Гоноровский, О флуктуации фазы в ламповом генераторе, Докл. АН СССР, 1955, **101**, 4, 657.
3. С. М. Рытов, Флуктуации в автоколебательных системах томсоновского типа, I, II, ЖЭТФ, 1955, **29**, 3, 304, 315.
4. В. С. Троицкий, Вопросы теории флуктуаций в автогенераторах, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1958, **1**, 1, 20.
5. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах со многими степенями свободы, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1958, **1**, 2, 71.
6. С. И. Евтянов, О связи между символическими и укороченными уравнениями, Радиотехника, 1946, **1**, 1, 68.
7. С. И. Евтянов, В. Н. Кулешов, Флуктуации в одноконтурных автогенераторах, НДВШ (Радиотехника и электроника), 1958, **1**, 4, 93.
8. Се Си, Общее характеристическое уравнение для исследования устойчивости стационарного режима автогенераторов, Радиотехника и электроника, 1958, **3**, 6, 770.
9. Г. А. Елкин, М. И. Родак, Теоретическое исследование статистических явлений в автоколебательных системах с автоподстройкой, Отчет ИРЭ АН СССР, № 101-02-55.

Поступила в редакцию
14 VII 1960

1961 № 4

ИССЛЕДОВАНИЕ НА ЭЛЕКТРОННЫХ МОДЕЛЯХ НЕКОТОРЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ ДЛЯ ФИЛЬТРАЦИИ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ СЛУЧАЙНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

Н. К. Кульман, П. С. Ланда

Проведено исследование нелинейного фильтра для выделения импульсного сигнала случайной длительности из белого шума на типовой электронно-моделирующей машине МН-7. Для выяснения эффективности работы нелинейного фильтра полученные результаты сравнены с результатами фильтрации линейного фильтра, рассчитанного по теории Винера — Колмогорова и смоделированного на той же машине МН-7. Работа оптимальных нелинейного и линейного фильтров в сочетании с решающими пороговыми устройствами исследовалась при различных отношениях сигнал/шум, а также при различных параметрах сигнала.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время все большее значение приобретают вопросы, связанные с выбором оптимальных систем, осуществляющих выделение слабых сигналов из шумов. Теоретическое рассмотрение задачи об оптимальном приеме имеется в ряде работ [1—6]. В работах Винера [1] и Колмогорова [2] изложена теория линейной фильтрации. Как известно, если сигнал и шум имеют гауссовское распределение вероятностей, то линейный фильтр, рассчитанный по теории Винера — Колмогорова, является самым оптимальным по всем критериям. Если же сигнал либо шум не имеет гауссовского распределения вероятностей, то оптимальной фильтрующей системой будет нелинейный фильтр, дающий на выходе апостериорное распределение вероятностей для данного типа сигнала, в сочетании с решающим устройством [3—6]. Выбор решающего устройства определяется заданием критерия оптимальности фильтра, зависящего от конкретных условий задачи.

В работах [3, 4] для апостериорных вероятностей приведены интегральные выражения, на основании которых во многих даже сравнительно простых случаях очень трудно сконструировать реальную систему. В этом отношении более удобно описание оптимальной системы в форме дифференциальных уравнений [5], пользуясь которыми можно относительно несложным образом выполнить реальную оптимальную систему, например при помощи электронных моделей.

В настоящей работе на типовой электронно-моделирующей машине МН-7 проведено исследование нелинейного фильтра для выделения импульсного сигнала случайной длительности из белого шума. Для выяснения эффективности работы нелинейного фильтра полученные результаты сравнены с результатами фильтрации линейной системой, рассчитанной по теории Винера — Колмогорова и смоделированной на той же машине МН-7. В ряде частных случаев получены теоретические оценки для некоторых величин, характеризующих эффективность нелинейной и линейной фильтраций, которые сравнены с результатами эксперимента. В качестве таких величин были выбраны: среднее число ложных импульсов за одну секунду и среднее относительное число необнаруженных импульсов в зависимости от длительности. Работа оптимальных нелинейного и линейного фильтров исследовалась при различных отношениях сигнал/шум, а также при различных параметрах сигнала.

1. УРАВНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО И ЛИНЕЙНОГО ФИЛЬТРОВ. МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ И ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРУЮЩИХ СИСТЕМ

Сигнал представляет собой последовательность положительных и отрицательных импульсов одинаковой амплитуды a, но случайной длительности (так называемый обобщенный телеграфный сигнал) с априорно известными статистическими характеристиками: α — среднее число переходов из состояния $+a$ в состояние $-a$ в 1 *сек*; β — среднее число переходов из состояния $-a$ в состояние $+a$ в 1 *сек*. Такой сигнал является одномерным процессом Маркова. Априорные вероятности $w_1(t)$ и $w_2(t)$ того, что сигнал s в момент времени t равен $+a$ или $-a$ соответственно подчиняются следующей системе уравнений:

$$\dot{w}_1 = -\alpha w_1 + \beta w_2,$$

$$\dot{w}_2 = \alpha w_1 - \beta w_2.$$

Легко показать, что величины α и β обратно пропорциональны средней длительности положительных и отрицательных импульсов, соответственно.

Из соотношения (13) работы [5] можно получить следующее уравнение оптимальной фильтрации:

$$\dot{x} = -(\alpha - \beta)\, a - (\alpha + \beta)\, x + \frac{1}{N}(a^2 - x^2)\, r(t), \qquad (1)$$

где $x(t)$ — апостериорное среднее значение сигнала: $x(t) = a(w_{1\text{ps}} - w_{2\text{ps}})$; $w_{1\text{ps}}$ и $w_{2\text{ps}}$ — апостериорные вероятности того, что сигнал имеет значение $+a$ или $-a$ соответственно; $r(t) = s(t) + n(t)$ — временна́я последовательность «сигнал + шум» на входе фильтра; N — интенсивность шума, определяемая соотношением $\overline{nn}_\tau = N\,\delta(\tau)$.

Для формирования последовательности прямоугольных импульсов $\tilde{s}_1(t)$ используем критерий максимума апостериорной вероятности, т. е. создадим устройство, дающее на выходе положительное напряжение $+a$, если $x(t) > 0$, и отрицательное $-a$, если $x(t) < 0$. Таким устройством может служить электронное реле, осуществленное на машине МН-7 по одной из схем «типовых нелинейностей». Фильтр, описываемый уравнением (1), в сочетании с пороговым устройством является оптимальной нелинейной фильтрующей системой для данного типа сигналов.

Поскольку в настоящей работе проводится сравнение качества нелинейного и линейного фильтров при помощи электронных моделей, то удобно последний описать также при помощи дифференциального уравнения. Для этого вычислим частотную характеристику линейного фильтра аналогично тому, как это сделано в [7] для частного случая, когда средние длительности положительных и отрицательных импульсов равны. Расчет дает

$$\Phi(j\omega) = \frac{8\alpha\beta a^2}{N(\alpha+\beta)^2} \frac{1}{1+\sqrt{1+\dfrac{8\alpha\beta a^2}{N(\alpha+\beta)^3}}} \frac{1}{(\alpha+\beta)\sqrt{1+\dfrac{8\alpha\beta a^2}{N(\alpha+\beta)^3}}+j\omega}.$$

Известно, что фильтр, обладающий частотной характеристикой типа $\Phi(j\omega) = B/(A + j\omega)$, описывается дифференциальным уравнением $\dot{x} + Ax = Br(t)$, где $r(t)$ — сигнал на входе фильтра; $x(t)$ — выход фильтра. Подставив значения A и B, получим следующее уравнение оптимального линейного фильтра:

$$\dot{x} + (\alpha+\beta)\sqrt{1+\frac{8\alpha\beta a^2}{N(\alpha+\beta)^3}}\; x = \frac{8\alpha\beta a^2}{N(\alpha+\beta)^2} \frac{r(t)}{1+\sqrt{1+\dfrac{8\alpha\beta a^2}{N(\alpha+\beta)^3}}}. \qquad (2)$$

Полученный на выходе линейного фильтра сигнал преобразуется в последовательность прямоугольных импульсов $\tilde{s}_2(t)$ также при помощи электронного реле *.

На рис. 1 представлены блок-схемы моделей нелинейного и линейного фильтров с электронными реле. Поведение моделей описывается уравне-

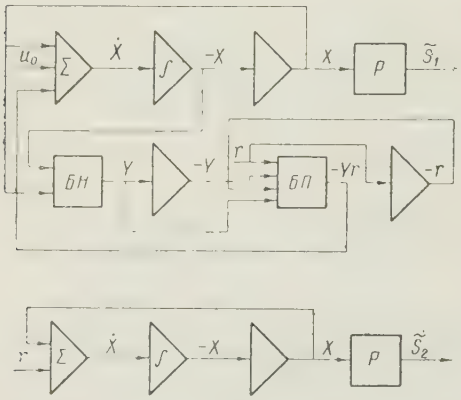


Рис. 1. Блок-схема моделей нелинейного и линейного фильтров:

треугольник — усилитель-инвертор; ∫ — интегратор; *БН* — блок нелинейности; *БП* — блок перемножения; Σ — сумматор; *P* — электронное реле; $u_0 = (\alpha - \beta)\, aM_x RC$, где $M_x = X/x$ — «масштабный» множитель; *RC*—постоянная времени интегратора

ниями оптимальной фильтрации (1) и (2). Математическим величинам в уравнениях x и $y(x) = a^2 - x^2$ соответствуют напряжения в моделях (машинные переменные) X и $Y(X)$ (см. [8]).

2. ГЕНЕРАТОР ИМПУЛЬСОВ СЛУЧАЙНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ И ГЕНЕРАТОР «БЕЛОГО» ШУМА. ИЗМЕРЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ШУМА

Генератор импульсов случайной длительности (рис. 2) служит для образования полезного сигнала $s(t)$ и состоит из генератора низкочастотного шума и триггерной схемы. В триггерной схеме использованы два реле типа РСМ и одно поляризованное реле типа РП-5.

На обмотку реле РП-5 (Рл 3) подается низкочастотное случайное напряжение $n_1(t)$ с генератора шума (ГШ1), которое вызывает соответствующее перемещение якоря, вследствие чего на выходе схемы появляется сигнал, случайно принимающий значения $+a$ и $-a$ с вероятностями α и β порядка единицы (средняя длительность импульса порядка 1 *сек*). ГШ1 представ-

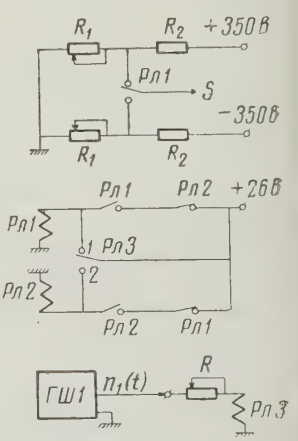


Рис. 2. Принципиальная схема генератора импульсов случайной длительности

ляет собой инфранизкочастотный шумовой генератор с полосой порядка 15 *гц*, описанный в работе [9]. Изменяя величину шума, подаваемого на Рл3, и смещая его среднее значение, можно менять среднее число перемен знака сигнала в 1 *сек* (α и β).

Для получения широкополосного низкочастотного шума, смешиваемого с сигналом, был изготовлен генератор шума низкой частоты (ГШ2),

* Фильтрующая система, состоящая из линейного фильтра и реле, в дальнейшем часто условно называется «линейной», хотя в нее входит реле — принципиально нелинейный элемент.

одобный ГШ1. ГШ2 дает на выходе прокополосный случайный процесс $n_2(t)$, который может быть смешан с сигналом в качестве «белого» шума ширина полосы шума порядка 00 *гц*).

Для образования временно́й последовательности сигнал + шум служит сумматор, представляющий собой обычный усилитель постоянного тока на сопротивлениях (УПТ). Коэффициент передачи полезного сигнала выбран равным единице, в то время как спектральная плотность шума может меняться в довольно широких пределах при помощи изменения коэффициента передачи шума K. В результате, на выходе сумматора имеем сигнал $r(t) = s(t) + n(t)$, где $n(t) = Kn_2(t)$. Поскольку обычно сигнал $s(t)$ и шум $n(t)$ статистически независимы, что и предполагалось при выводе уравнений оптимальной фильтрации, источники шумов $n_1(t)$ и $n_2(t)$ должны быть некоррелированными.

Оптимальный фильтр может быть сконструирован только в том случае, если априорно известны свойства как сигнала, так и шума. Поэтому необходимо найти спектральную плотность шума N в рабочем диапазоне частот. Для этого достаточно измерить дисперсию шума σ^2 и определить его спектральный состав $F(j\omega)$. Тогда $N = \sigma^2/\Delta f$, где

$$\Delta f = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F^*(j\omega)\, d\omega/2\pi\, F^2(0) —$$

эквивалентная полоса частот. Дисперсия шума σ^2 приблизительно выражается формулой

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T n^2(t)\, dt,$$

если время усреднения T много больше времени корреляции шума.

Величина дисперсии шума $n(t)$ была определена экспериментально. Для этого шум был подан сначала на квадратор, а затем на интегратор, выходное напряжение которого измерялось прибором. Значения интенсивности шума и величин α и β, для которых были получены экспериментальные данные, приведены в табл. 1.

Таблица 1

№ п. п.	Эксперимент	Q	Среднее число ложных импульсов в 1 *сек*				Среднее относительное запаздывание в отработке импульсов, %				Полная относительная ошибка, %		Относительная ошибка в отработке длительности, %	
			нелинейная система		линейная система		нелинейная система		линейная система		нелинейная система	линейная система	нелинейная система	линейная система
			эксперимент. результат	теорет. оценка	эксперимент. результат	теорет. оценка	положит. импульс	отрицат. импульс	положит. импульс	отрицат. импульс				
1	$N = 0{,}26\ в^2\ сек$; $\alpha = \beta = 1\ сек^{-1}$	0,13	—	—	—	—	9		8		11	11	2	4
2	$N = 0{,}26\ в^2\ сек$; $\alpha = \beta = 2\ сек^{-1}$	0,26	—	—	—	—	13		13		19	20	6	7
3	$N = 0{,}13\ в^2\ сек$; $\alpha = \beta = 1\ сек^{-1}$	0,06	—	—	—	—	7		7		9	9	2	2
4	$N = 0{,}26\ в^2\ сек$; $\alpha = 6{,}1\ сек^{-1}$; $\beta = 0{,}6\ сек^{-1}$	0,44	0,4	0,4	2,3	1,7	28	2	21	5	9	15	—	—
5	$N = 0{,}13\ в^2\ сек$; $\alpha = 6{,}1\ сек^{-1}$; $\beta = 0{,}6\ сек^{-1}$	0,22	0,4	0,4	1,4	1,2	27	2	23	4	7	9	—	—

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

В качестве регистратора результатов нелинейной и линейной фильтраций применялся шлейфовый осциллограф МПО-2. Полученные при каждом эксперименте осциллограммы, содержащие более сотни положительных и сотни отрицательных импульсов полезного сигнала, количественно

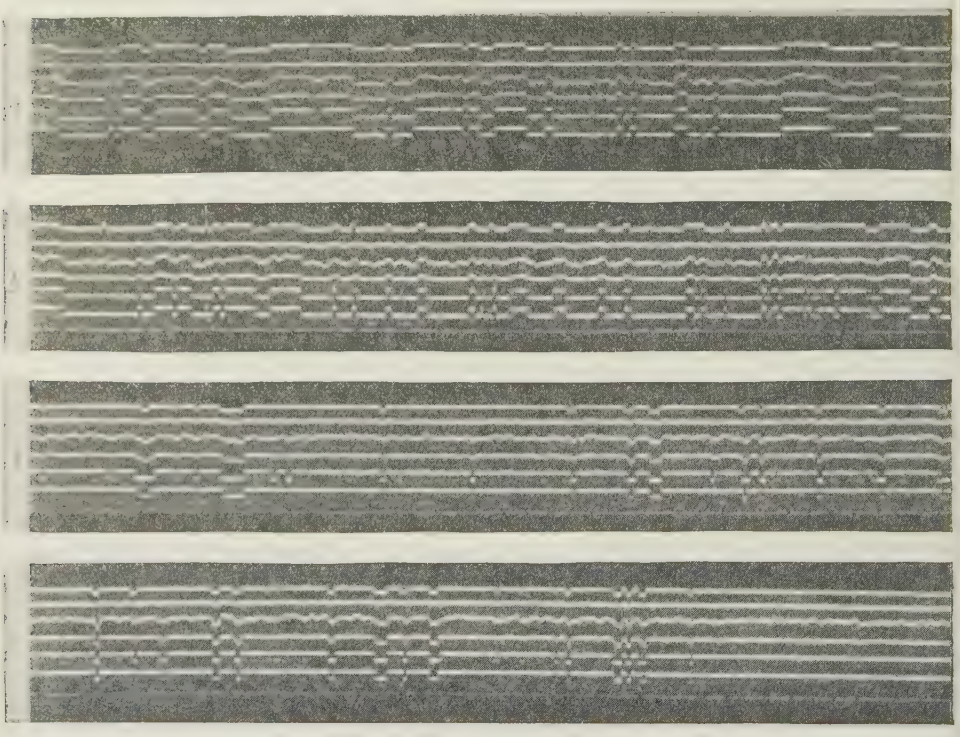


Рис. 3. Типовые осциллограммы:

сверху вниз — полезный сигнал $s(t)$; временна́я последовательность $r(t) = s(t) + n(t)$; напряжение с выхода линейного фильтра; напряжение с выхода нелинейного фильтра; импульсный сигнал $\widetilde{s}_2(t)$ с выхода линейной системы; импульсный сигнал $\widetilde{s}_1(t)$ с выхода нелинейной системы и секундные метки — импульсы, вырабатываемые специальным блоком в электронно-моделирующей машине МН-7 (*а* — эксперимент 3; *б* — эксперимент 2; *в* — эксперимент 4; *г* — эксперимент 5)

обрабатывались, и отмечались все ошибки, возникавшие при фильтрации полезного сигнала. Типичные осциллограммы показаны на рис. 3.

Необходимо отметить, что в каждом эксперименте прежде всего изучался полезный сигнал $s(t)$: на основании более чем ста положительных и такого же числа отрицательных импульсов определялись их средние длительности и вероятности перехода сигнала α и β, которые сравнивались с априорно заданными значениями. Ошибка в определении α и β составляла примерно 10—15%. Ввиду несовпадения фактических постоянных перехода полезного сигнала с априорно заданными значениями, а также погрешности в определении спектральной плотности шума (порядка 25%) исследованные модели фильтров представляли собой не вполне оптима́льные, но достаточно близкие к ним системы.

Для оценки эффективности работы фильтра могут быть введены различные критерии в зависимости от конкретных практических требований к работе устройства, в котором он применяется.

Во многих случаях целесообразно оценивать эффективность фильтрации с точки зрения полного относительного времени неправильной отработки сигнала — полной относительной ошибки. Конечно, практическая ценность этого критерия зависит от конкретных характеристик полезного

сигнала. Если полезный сигнал является фототелеграфным, то в простейшем случае это — симметричный сигнал, принимающий два значения, причем одно из них соответствует «белому», а другое — «черному». Очевидно, что в этом случае информация заключена в длительности импульсов, и неточная отработка ее приводит к искажению картины. Регулярное запаздывание в обнаружении импульсов, связанное с инерционностью фильтрующей системы, не приводит тут к потере информации, потому что можно учесть ошибку среднего запаздывания. Следовательно, практически

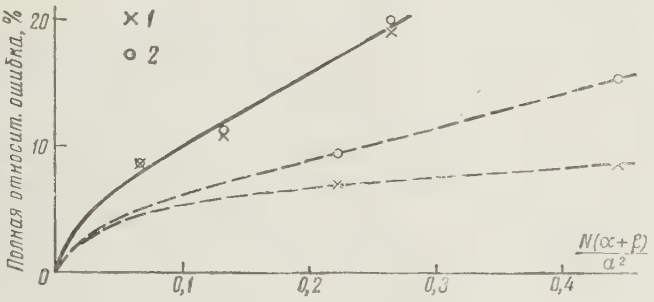


Рис. 4. Полная относительная ошибка фильтрации (эксперименты 1—5):

сплошная линия — фильтрация симметричного сигнала; пунктир — фильтрация асимметричного сигнала; *1* — экспериментальные значения для нелинейной фильтрации; *2* — экспериментальные значения для линейной фильтрации

наиболее интересно оценивать эффективность фильтрации симметричного импульсного сигнала с точки зрения относительной ошибки в отработке длительности импульсов, которую можно определить как разность полной относительной ошибки и средней относительной ошибки запаздывания.

Результаты экспериментального исследования фильтрации симметричного сигнала представлены в табл. 1 (эксперименты 1—3). Как видно из табл. 1, ошибки фильтрации возрастают с увеличением интенсивности шума. Увеличение вдвое среднего числа переходов сигнала в одну секунду при неизменном шуме также приводит к сильному возрастанию ошибок фильтрации, что создает впечатление об усиленном шумовом воздействии на систему. Это и понятно, потому что с увеличением среднего числа переходов сигнала в единицу времени расширяется его спектр и должна соответственно возрасти полоса пропускания приемного устройства, что приводит к возрастанию неблагоприятного влияния шума на результаты фильтрации. Таким образом, полная относительная ошибка возрастает с увеличением величины $Q = N(\alpha + \beta)/a^2$, которую можно назвать обобщенным отношением шум/сигнал.

На рис. 4 (сплошная кривая) представлена зависимость полной относительной ошибки от Q для случая нелинейной и линейной фильтраций. Полная относительная ошибка в случае симметричного сигнала примерно одинакова для нелинейной и линейной фильтраций (разница $\sim 1\%$).

Довольно интересен также случай фильтрации асимметричного полезного сигнала. При $\alpha \gg \beta$ (резко асимметричный сигнал) средняя длительность положительного импульса много меньше средней длительности отрицательного импульса, вследствие чего отрицательный импульс можно рассматривать как паузу случайной длительности между положительными импульсами, несущими информацию, и задача фильтрации приобретает характер задачи обнаружения случайного импульсного сигнала в шумах.

В этом практически важном случае обнаружения положительного импульса из шума мы имеем дело с ошибками двух родов: ошибкой необнаружения, когда система не реагирует на изменение полярности сигнала,

и ошибкой ложного обнаружения, когда система указывает на изменение полярности сигнала, не имевшее место на самом деле. Ввиду того, что эти ошибки часто нужно знать априорно до конструирования фильтрующей системы, исключительно интересно попытаться оценить их хотя бы в некотором приближении. Для случая фильтрации резко асимметричного сигнала ($\alpha \gg \beta$) можно получить теоретические оценки для среднего числа ложных выбросов в единицу времени и вероятности необнаружения положительного импульса в зависимости от его длительности. Указанные теоретические оценки были вычислены в случае $\alpha = 6{,}1$ *сек*$^{-1}$, $\beta = 0{,}6$ *сек*$^{-1}$

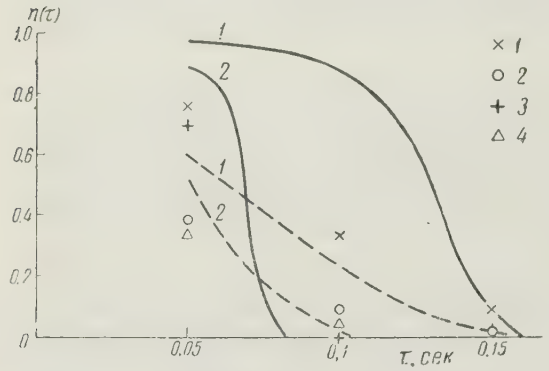


Рис. 5. Вероятность необнаружения положительных импульсов в зависимости от их длительности (эксперименты 4 и 5):

теоретическая оценка дана в виде кривой (*1* — эксперимент 4; *2* — эксперимент 5); сплошная линия — для нелинейной фильтрации; пунктир — для линейной фильтрации; *1* — экспериментальное значение вероятности необнаружения для нелинейной системы; *2* — то же соответственно для линейной системы в эксперименте 4; *3* — экспериментальное значение вероятности необнаружения для нелинейной системы; *4* — то же соответственно для линейной системы в эксперименте 5

для различных значений интенсивности шума. Основные результаты экспериментов для асимметричного сигнала с полученными для них теоретическими оценками также приведены в табл. 1 (эксперименты 4,5). Как видно из табл. 1, с увеличением Q возрастают как ошибка ложного обнаружения, так и ошибка запаздывания.

Для асимметричного сигнала при любом уровне шума среднее число ложных импульсов в единицу времени при нелинейной фильтрации много меньше, чем при линейной. Правда, при этом появляется большее запаздывание в обнаружении положительных импульсов (рис. 5), но эта ошибка представляет собой сравнительно малый вклад в общую ошибку фильтрации вследствие того, что положительные импульсы появляются редко. Наибольшую роль играет ошибка, возникающая за счет появления ложных импульсов в длительных паузах между положительными импульсами сигнала. На рис. 4 (пунктирные кривые) представлена зависимость полной относительной ошибки от Q. Как видно из рис. 4, полная относительная ошибка для нелинейной системы оказывается значительно меньше, чем для линейной.

С целью улучшения работы линейной системы на выходе линейного фильтра в эксперименте 6 использовалось реле с переменным порогом срабатывания b. Основные результаты эксперимента приведены в табл. 2.

Таблица 2

b, *в*	Эксперимент. значение среднего числа ложных импульсов в 1 *сек*	Теорет. значение среднего числа ложных импульсов в 1 *сек*	Среднее относительное запаздывание в обнаружении импульсов, %		Полная относительная ошибка, %
			положит.	отрицат.	
0,12	2,0	1,2	20	5	12
0,2	1,5	0,9	34	4	11
0,4	0,7	0,4	35	2	8
0,6	0,4	0,1	54	1	8
0,64*	—	—	100	0	9

* При b=0,64 *в* вообще прекращалось выделение положительных импульсов, и полная относительная ошибка линейной фильтрации становилась равной 9 % — величине, равной относительному содержанию положительных импульсов в полезном сигнале.

Значения α, β и N — те же, что и в эксперименте 4. Как видно из табл. 2, с повышением порога срабатывания уменьшается среднее число ложных импульсов в единицу времени, но возрастает ошибка необнаружения. При оптимальном пороге ($b = 0{,}4$—$0{,}6$ $в$) работа фильтрующей системы почти ничем не отличается от работы соответствующей нелинейной системы, исследовавшейся в эксперименте 4, с точки зрения полной относительной ошибки фильтрации. Однако весьма существенным оказывается следующее обстоятельство: при оптимальном пороге срабатывания короткие положительные импульсы обнаруживаются видоизмененной линейной системой с бо́льшим относительным запаздыванием, чем в случае нелинейной фильтрации, в то время как число ложных импульсов примерно одинаково. Если считать, что длинные импульсы соответствуют паузе между сообщениями, а короткие импульсы являются носителями информации (например, сигналы управления в системах телеконтроля), то налицо преимущество нелинейной системы фильтрации перед видоизмененной линейной системой.

ВЫВОДЫ

1. Полная относительная ошибка в результатах фильтрации монотонно возрастает с увеличением величины $Q = N(\alpha + \beta)/a^2$ обобщенного отношения шум/сигнал, причем для фиксированного значения величины Q полная относительная ошибка как для нелинейной, так и для линейной системы в случае фильтрации асимметричного сигнала меньше соответствующего значения ошибки при фильтрации симметричного сигнала.

2. Оценивая результаты фильтрации с точки зрения полной относительной ошибки, можно утверждать, что в случае выделения асимметричного полезного сигнала из шумов налицо явное преимущество нелинейной системы. В случае фильтрации симметричного сигнала нелинейный и линейный фильтры дают примерно одну и ту же ошибку.

3. При наличии асимметричного сигнала на входе фильтра можно улучшить работу линейной системы подбором соответствующего порога срабатывания реле, стоящего на выходе линейного фильтра, так что видоизмененная линейная система будет давать примерно ту же полную ошибку, что и нелинейная система.

4. Теоретические оценки ошибок ложного обнаружения и необнаружения, просчитанные для ряда конкретных случаев, дали вполне удовлетворительное совпадение с экспериментальными результатами.

В заключение авторы приносят благодарность С. П. Стрелкову и Р. Л. Стратоновичу за большое внимание к работе и ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Wiener, The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time-series, J. Wiley, N. Y., 1949.
2. А. Н. Колмогоров, Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей, Изв. АН СССР, Сер. матем., 1941, 5, 3.
3. W. D. White, The role of nonlinear filters in electronic systems, National Electronics Conference Proc., 1954, 9 (Chicago).
4. И. Н. Амиантов, Применение теории решений к задачам обнаружения сигналов и выделения сигналов из шумов. Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1958.
5. Р. Л. Стратонович, К теории оптимальной нелинейной фильтрации случайных функций, Теория вероятностей и ее применения, 1959, 4, 2, 239.
6. Ф. М. Вудворд, Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации, перев. с англ., Изд. Советское радио, 1955.
7. В. В. Солодовников, Введение в статистическую динамику систем автоматического регулирования, ГТИ, 1952, стр. 273.
8. Б. Я., Коган Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования, Физматгиз, 1959.
9. Ю. М. Романовский, Генератор шумов низкой частоты, Приборы и техника эксперимента, 1958, 4, 98.

Физический факультет
Московского государственного
университета им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
22 IV 1960

К ЗАДАЧЕ ОБНАРУЖЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ ШУМА

В. Ф. Писаренко

Рассмотрена задача обнаружения случайного сигнала на фоне шума при непрерывном наблюдении в течение конечного отрезка времени. Для определенного класса сигналов и шумов указаны способы нахождения предельного отношения правдоподобия и его характеристической функции.

ВВЕДЕНИЕ

Мы будем рассматривать задачу обнаружения сигнала на фоне шу в случае, когда сигнал, так же как и шум, является случайным процесс До настоящего времени при рассмотрении задач обнаружения сигна (как случайного, так и неслучайного) обычно использовали лишь знач ния наблюдаемого процесса в некоторые дискретные моменты време (см. [1]). При этом удавалось вычислить характеристики обнаружения явном виде, как правило лишь в том случае, когда значения наблюда мого процесса в выбранные моменты можно было считать независимым

В отличие от такого подхода при решении поставленной задачи мы б дем использовать все значения наблюдаемого процесса на некотором о резке времени (ср. [2]). Вообще говоря, для практических целей всег можно ограничиться конечным числом точек наблюдения, расположенн достаточно близко друг от друга. Однако при таком дискретном наблю нии коррелированных величин возникает ряд трудностей вычислительно характера. Так, например, если процесс наблюдается в моменты t_1, ..., t_n, то для рассматриваемой задачи нам пришлось бы находить собстве ные числа матриц n-го порядка и обращать эти матрицы, что, как извест является нелегкой вычислительной задачей. Для непрерывного же набл дения соответствующая задача сводится к нахождению собственных ч сел некоторых интегральных уравнений и решению таких уравнений, ч удается сделать для рассматриваемых ниже классов сигналов и шумо Ясно, что при непрерывном наблюдении информация, содержащаяся реализации процесса, используется полнее, чем при дискретном, однак этого вопроса мы не касаемся хотя бы по той причине, что нахожден характеристик дискретного наблюдения коррелированных величин, ка уже отмечалось, является нелегкой вычислительной задачей. Замети лишь, что если расстояния между точками дискретного наблюдения мно меньше интервалов корреляции сигнала и шума, то можно считать, ч реальные характеристики обнаружения для дискретного и непрерывно наблюдений одинаковы.

Сформулируем несколько более общую, чем указано в заглавии, зада чу проверки двух гипотез относительно случайного процесса. Частны случаем этой задачи является задача обнаружения сигнала на фоне шума

Пусть мы многократно наблюдаем на интервале времени $[0, T]$ слу чайный процесс $\xi(t)$, причем каждый раз возможен один из двух случае или $\xi(t) = \eta_0(t)$, или же $\xi(t) = \eta_1(t)$, где $\eta_0(t)$, $\eta_1(t)$ — стационарные гаус совские процессы с нулевым средним * и рациональной спектрально

* Ниже показано, что полученные результаты без труда переносятся на случа произвольных известных средних значений.

плотностью. Это означает, что преобразования Фурье корреляционных функций $\eta_0(t)$ и $\eta_1(t)$, обозначаемых $K(t-s)$ и $L(t-s)$ соответственно, имеют вид

$$\left|\frac{Q_0(i\lambda)}{P_0(i\lambda)}\right|^2 \text{ и } \left|\frac{Q_1(i\lambda)}{P_1(i\lambda)}\right|^2,$$

где $Q_0(i\lambda)$, $Q_1(i\lambda)$, $P_0(i\lambda)$, $P_1(i\lambda)$ — многочлены, не имеющие корней в нижней полуплоскости комплексной переменной λ (с радиотехнической точки зрения процессы с рациональной спектральной плотностью можно получить при прохождении «белого шума» через некоторую цепь с сосредоточенными постоянными).

Зная выборочную функцию (реализацию) процесса $\xi(t)$ на отрезке времени $[0, T]$, будем проверять две взаимоисключающие гипотезы относительно этой реализации: гипотеза H_0 предполагает, что полученная в результате наблюдения функция есть реализация процесса $\eta_0(t)$; гипотеза H_1 предполагает, что мы наблюдали реализацию процесса $\eta_1(t)$. Для проверки гипотез H_0 и H_1 воспользуемся критерием, основанным на отношении правдоподобия (см. [1]) (точнее на некотором обобщении этого понятия для случая, когда наблюдаемый процесс нельзя охарактеризовать конечным числом случайных параметров (см. [3]).

Обычная схема обнаружения сигнала на фоне шума (сигнал и шум независимы) соответствует случаю, когда $L(t-s) = K(t-s) + M(t-s)$, где $K(t-s)$ — корреляционная функция шума, а $M(t-s)$ — корреляционная функция сигнала.

В § 1 указан способ нахождения предела отношения правдоподобия. В § 2 рассмотрен способ нахождения характеристической функции предельного отношения правдоподобия. В § 3 обсуждено замечание Л. А. Вайнштейна о более реалистичной постановке задачи обнаружения сигнала в шуме. Конкретные формулы, полученные в § 1 и 2, по-видимому, новые, однако их вывод не вполне корректен с математической точки зрения и поэтому вопрос о строгом математическом обосновании этих формул остается пока открытым.

1. НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛА ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ

При рассмотрении непрерывных случайных процессов бывает удобно перейти от случайного процесса $\xi(t)$ к дискретной счетной системе связанных с $\xi(t)$ случайных величин $\{\zeta_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, которые мы назовем координатами процесса. При этом выбирать ζ_n следует так, чтобы в $\{\zeta_n\}$ сохранялась вся информация о $\xi(t)$. Например, если в качестве $\{\zeta_n\}$ возьмем значения $\xi(t)$ во всех рациональных точках отрезка $[0, T]$, то для непрерывных $\xi(t)$ задание реализации величин $\{\zeta_n\}$ равносильно заданию реализации $\xi(t)$. Часто оказывается удобным брать в качестве $\{\zeta_n\}$ коэффициенты Фурье процесса $\xi(t)$ по некоторой полной на $[0, T]$ системе функций $\{\varphi_n(t)\}$:

$$\zeta_n = \int_0^T \xi(t)\,\varphi_n(t)\,dt.$$

Так, например, в качестве $\{\varphi_n(t)\}$ можно было бы взять обычную систему тригонометрических функций на $[0, T]$.

Итак, будем считать, что мы каким-то способом перешли от непрерывного процесса $\xi(t)$ к его координатам $\{\zeta_n\}$. Если обозначить совместную плотность вероятности первых m координат $\zeta_1 \ldots \zeta_m$ при гипотезах H_0 и H_1 соответственно через $p_0(y_1 \ldots y_m)$ и $p_1(y_1 \ldots y_m)$, то

обычное отношение правдоподобия для $\zeta_1 \dots \zeta_m$ запишется так:

$$l_m(y_1 \dots y_m) = p_0(y_1 \dots y_m) / p_1(y_1 \dots y_m).$$

Подставим в $l_m(y_1 \dots y_m)$ реализацию случайного вектора $(\zeta_1 \dots \zeta_m)$, обозначаемую $(x_1 \dots x_m)$

$$l_m(x_1 \dots x_m) = p_0(x_1 \dots x_m) / p_1(x_1 \dots x_m). \qquad (1)$$

Поскольку при увеличении m информация о процессе $\xi(t)$, содержащаяся в $\zeta_1 \dots \zeta_m$, увеличивается, и в пределе вся информация о $\xi(t)$ содержится в $\{\zeta_n\}$, то естественно перейти в отношении (1) к пределу при $m \to \infty$. Хотя плотности $p_0(x_1 \dots x_m)$ и $p_1(x_1 \dots x_m)$ при $m \to \infty$ не стремятся, вообще говоря, к каким-либо пределам, их отношение $l_m(x_1 \dots x_m)$ при некоторых дополнительных ограничениях на $K(t-s)$ и $L(t-s)$ стремится к определенному пределу, который зависит от выборочной функции $x(t)$. Этот предел, который обозначим $F[x(t)]$, как показано в [3], и является тем функционалом от выборочной функции, который обобщает понятие обычного отношения правдоподобия на бесконечно-мерный случай *.

Замечание. Если выполняется условие

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left| \frac{Q_0(i\lambda) P_1(i\lambda)}{P_0(i\lambda) Q_1(i\lambda)} \right|^2 \neq 1, \qquad (2)$$

то, как известно (см. [4]), можно безошибочно определить при любом времени наблюдения T, какая из двух конкурирующих гипотез верна (подробнее об этом см. § 3). При этом функционал $F[x(t)]$ принимает значение 0 на всех выборочных функциях процесса $\eta_0(t)$ и значение ∞ на всех выборочных функциях процесса $\eta_1(t)$. Наоборот, при выполнении условия

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left| \frac{Q_0(i\lambda) P_1(i\lambda)}{P_0(i\lambda) Q_1(i\lambda)} \right|^2 = 1 \qquad (3)$$

можно показать, что функционал $F[x(t)]$ принимает всегда конечные значения. Покажем, как можно найти явный вид функционала $F[x(t)]$ в рассматриваемом нами случае рациональных спектральных плотностей и при выполнении условия (3)

В качестве $\{\zeta_n\}$ возьмем значения $\xi(t)$ в точках вида $t_{nm} = Tm/n$, $m = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$. Обозначим матрицы $\{K(t_{nj} - t_{ni})\}$ и $\{L(t_{nj} - t_{ni})\}$ через K_n и L_n, а соответствующие обратные матрицы — через K_n^{-1} и L_n^{-1}. В рассматриваемом нами случае матрицы K_n и L_n всегда не вырождены, так что обратные матрицы K_n^{-1} и L_n^{-1} существуют.

Плотности вероятности случайных величин $\xi(t_{n1}) \dots \xi(t_{nn})$ при осуществлении гипотез H_0 и H_1 запишутся следующим образом:

$$p_0(y_1 \dots y_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |K_n|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j} \varkappa_{ij}^n y_i y_j\right\},$$

$$p_1(y_1 \dots y_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |L_n|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j} \nu_{ij}^n y_i x_j\right\}.$$

* В работе [5] доказывается, что каждому процессу $\eta(t)$ можно сопоставить меру μ, определенную на минимальном борелевском теле B подмножеств пространства действительных функций, содержащем все цилиндрические множества. Если меры μ_0 и μ_1, соответствующие процессам $\eta_0(t)$ и $\eta_1(t)$, таковы, что μ_0 абсолютно непрерывна относительно μ_1, то обобщением отношения правдоподобия на бесконечно-мерный случай будет производная Радона — Никодима меры μ_0 по мере μ_1 (см. [3]), которую мы обозначили $F[x(t)]$. В конечно-мерном случае производная Радона — Никодима — это обычное отношение правдоподобия.

Здесь $\varkappa_{ij}^n$, ν_{ij}^n — элементы матриц K_n^{-1} и L_n^{-1}. Далее составим обычное отношение правдоподобия для случайных величин $\xi(t_{n1}) \ldots \xi(t_{nn})$ и подставим в него значения выборочной функции $x_{ni} = x(t_{ni})$:

$$l_n(x_{n1} \ldots x_{nn}) = |L_n K_n^{-1}|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum \varkappa_{ij}^n x_{ni} x_{nj} + \frac{1}{2}\sum \nu_{ij}^n x_{ni} x_{nj}\right\}. \quad (4)$$

Обозначим $\sum\limits_j \varkappa_{ij}^n x_{nj} = u_{ni}/n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассматривая эти равенства как систему линейных уравнений относительно x_{nj} и решая ее, получим

$$x_{nj} = \sum_i K(t_{nj} - t_{ni}) \frac{u_{ni}}{n}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (5)$$

Далее имеем

$$\sum_{i,\,j} \varkappa_{ij}^n x_{ni} x_{nj} = \sum_i \frac{x_{ni} u_{ni}}{n}.$$

Аналогичные операции можно проделать и со вторым членом в экспоненте (4). Теперь совершим формальный переход к пределу при $n \to \infty$. Тогда равенство (5), правую часть которого можно рассматривать как интегральную сумму с интервалом разбиения, равным $1/n$, перейдет в интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^T K(t - s) u(s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Точно так же сумма $\sum\limits_i \frac{x_{ni} u_{ni}}{n}$ перейдет в интеграл $\int\limits_0^T x(t) u(t)\, dt$.

Для второго слагаемого в экспоненте (4) аналогичным образом получим вместо суммы $\sum\limits_{i,\,j} \nu_{ij}^n x_{ni} x_{nj}$ интеграл $\int\limits_0^T x(t) v(t)\, dt$, где $v(t)$ — решение интегрального уравнения

$$x(t) = \int_0^T L(t - s) v(s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Итак, в результате получим

$$\lim_{n\to\infty} l_n(x_{n1} \ldots x_{nn}) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{L_n}{K_n}\right|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T x(t)\,[u(t) - v(t)]\, dt\right\}, \quad (6)$$

где $u(t)$ и $v(t)$ — решения интегральных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^T K(t - s) u(s)\, ds = x(t), && (7)\\ &\int_0^T L(t - s) v(s)\, ds = x(t) && (8)\end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Уравнения вида (7), (8) встречаются в теории оптимального линейного прогнозирования случайных процессов. Как показано в [6, 12], для случая рациональных спектральных плотностей решение уравнения (7)

надо искать в виде

$$u(s) = \widetilde{u}(s) + \sum_{k=0}^{l-1} a_k \delta^{(k)}(s) + \sum_{k=0}^{l-1} b_k \delta^{(k)}(s-T),$$

где $\widetilde{u}(s)$ — решение дифференциального уравнения

$$Q_0\left(\frac{d_1}{dt}\right) Q_0\left(-\frac{d}{dt}\right) \widetilde{u}(t) = \frac{1}{2\pi} P_0\left(\frac{d}{dt}\right) P_0\left(-\frac{d}{dt}\right) x(t), \quad 0 < t < T; \qquad (9)$$

a_k, b_k — константы; $\delta^{(k)}(s)$ — k-я производная дельта-функции; l — разность степеней многочленов $P_0(i\lambda)$ и $Q_0(i\lambda)$. Для нахождения постоянных a_k, b_k и констант, входящих в общее решение уравнения (9), можно просто подставить $u(s)$ со всеми неопределенными константами в (7), проинтегрировать подынтегральное выражение и приравнять нулю коэффициенты при линейно-независимых функциях. Из полученных уравнений и найдутся неопределенные константы. Аналогично находится из уравнения (8) функция $v(s)$. В изложенном ниже примере мы используем несколько другой способ нахождения неопределенных констант.

Несмотря на то, что решения уравнений (7) и (8) содержат δ-функции и их производные, а также производные $x(t)$, которые будут обобщенными функциями (поскольку $x(t)$ имеет только $(l-1)$ обычную производную, а выражение $P_0\left(\frac{d}{dt}\right) P_0\left(-\frac{d}{dt}\right) x(t)$ содержит производные $x(t)$ более высокого порядка), если мы подставим эти решения в (6), то многие из обобщенных функций уничтожаются. Если затем произвести несколько интегрирований по частям, то в результате выражение (6) можно привести к форме, содержащей только обычные (не обобщенные) функции. Отметим, что при этом существенно используется условие (3).

Проиллюстрируем подробно приведенный способ нахождения $F[x(t)]$ на конкретном примере. Пусть $K(t-s) = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha|t-s|}$ и $L(t-s) = \frac{1}{\beta} e^{-\beta|t-s|}$. Уравнение (7) имеет вид

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^T u(s)\, e^{-\alpha|t-s|}\, ds = x(t).$$

Подставим в уравнение (7) $u(s)$ в виде

$$u(s) = \widetilde{u}(s) + a\delta(s) + b\delta(T-s).$$

Получим

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^T \widetilde{u}(s)\, e^{-\alpha|t-s|}\, ds + \frac{a}{\alpha} e^{-\alpha t} + \frac{b}{\alpha} e^{-\alpha(T-t)} = x(t). \qquad (10)$$

Далее вместо $\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha|t-s|}$ подставим $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(t-s)}\, d\lambda}{\alpha^2 + \lambda^2}$ и применим к обеим частям равенства дифференциальный оператор $-\frac{d^2}{dt^2} + \alpha^2$. Получим в левой части равенства

$$\frac{1}{\pi} \int_0^T \widetilde{u}(s)\, ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2} e^{i\lambda(t-s)}\, d\lambda = 2 \int_0^T \widetilde{u}(s)\, \delta(t-s)\, ds = 2\widetilde{u}(t).$$

ледовательно, $\widetilde{u}(t) = -\frac{x''(t)}{2} + \frac{\alpha^2}{2} x(t)$. Для нахождения a и b приме-им к (10) оператор $\frac{d}{dt} + \alpha$ и устремим $t \to T$. Получим

$$\frac{1}{\pi} \int_0^T \widetilde{u}(s)\, ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(T-s)}}{\alpha - i\lambda}\, d\lambda + 2b = x'(T) + \alpha x(T).$$

ак как $T - s$ в последнем интеграле при $0 < s < T$ положительно, то теореме Коши этот интеграл равен нулю. Следовательно,

$$b = \frac{1}{2} x'(T) + \frac{\alpha}{2} x(T).$$

рименяя к (10) оператор $-\frac{d}{dt} + \alpha$ и устремляя $t \to 0$, найдем, что

$$a = -\frac{1}{2} x'(0) + \frac{\alpha}{2} x(0).$$

результате

$$u(s) = \frac{1}{2} \{-x''(t) + \alpha^2 x(t) + \delta(t)[-x'(0) + \alpha x(0)] + \\ + \delta(t-T)[x'(T) + \alpha x(T)]\}.$$

аменяя α на β в этом равенстве, найдем $v(s)$:

$$v(s) = \frac{1}{2} \{-x''(t) + \beta^2 x(t) + \delta(t)[-x'(0) + \beta x(0)] + \\ + \delta(t-T)[x'(T) + \beta x(T)]\}.$$

одставив найденные $u(s)$ и $v(s)$ в формулу (6), получим

$$\gamma[(x, t)] = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{L_n}{K_n}\right|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{4} \int_0^T x^2(t)\, dt + \frac{\beta - \alpha}{4}[x^2(0) + x^2(T)]\right\}. \quad (11)$$

редел, стоящий перед экспонентой, нас не интересует, так как он не висит от реализации $x(t)$ (относительно нахождения этого предела явном виде см. § 2). Выражение (11) можно было бы получить и ругим путем. Так как для корреляционной функции $K(t-s) = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha|t-s|}$ при любом n нетрудно выписать обратную матрицу K_n^{-1}, то ожно непосредственно подсчитать предел квадратичной формы в экспо-енте (4) (см. [7, 13]). В результате для $F[x(t)]$ также получается ыражение (11). Для случая, когда $Q_0(i\lambda) \equiv 1$, нам удалось получить ормулы для неопределенных констант, входящих в решение уравне-ия (7). В результате решение уравнения (7) имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} P_0\left(\frac{d}{dt}\right) P_0\left(-\frac{d}{dt}\right) x(t) + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{n-1} \delta^{(l)}(t) \sum_{m=0}^{2n-1-l} x^{(m)}(0) \sum_{k=0}^{m} \pi_k \pi_{m+l+1-k} (-1)^k + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{n-1} \delta^{(l)}(t-T) \sum_{m=0}^{2n-1-l} x^{(m)}(T) \sum_{k=0}^{m} \pi_k \pi_{m+l+1-k} (-1)^{m+l-k},$$

де π_k — коэффициент при z^k в многочлене $P_0(z)$. Отсюда сразу полу-ается выражение для $F[x(t)]$ в случае, если $Q_0(i\lambda) \equiv 1$ и $Q_1(i\lambda) \equiv 1$.

В этом случае

$$F[x(t)] = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{L_n}{K_n}\right|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(P_{2k}-\widetilde{P}_{2k})(-1)^k \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \int_0^T \{x^{(k)}(t)\}^2\,dt + M + N_T - N_0\right]\right\},$$

где

$$M = \sum_{i,\,j=0}^{n-1} [(-1)^i x^{(i)}(T)\,x^j(T) + (-1)^j x^{(i)}(0)\,x^{(j)}(0)] \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{i} (-1)^k [\pi_k \pi_{i+j+1-k} - \widetilde{\pi}_k \widetilde{\pi}_{i+j+1-k}];$$

$$N_0 = \sum_{m=5}^{n-2} (-1)^m x^{(m)}(0) \sum (P_{2k} - \widetilde{P}_{2k})\, x^{(2k-m-1)}(0)$$

и внутренняя сумма берется по k: $2(m+1) \leqslant 2k < (n+m+1)$; N_T по лучается из N_0 заменой $x^{(m)}(0)$ на $x^{(m)}(T)$; величины с тильдой отно сятся к многочлену $P_1(z)P_1(-z)$; P_{2k} — коэффициент при z^{2k} в много члене $P_0(z)P_0(-z)$.

Замечание. Предлагаемый способ нахождения $F[x(t)]$ очевидны образом распространяется на случай, когда средние значения $\xi(t)$ пр гипотезах H_0 и H_1 отличны от нуля. Для этого нужно в правые част уравнений (7) и (8) вместо $\overline{x(t)}$ подставить $\overline{x(t)} + m_1(t)$ и $\overline{x(t)} + m_0(t)$ соответственно, где $m_0(t) = \overline{\eta_0(t)}$ и $m_1(t) = \overline{\eta_1(t)}$. Можно также нахо дить $F[x(t)]$, когда гипотезы H_0 и H_1 отличаются только средним значениями (см. [8]). Во всех этих случаях требуется, чтобы средни значения были достаточно гладкими функциями.

Без выкладок приведем функционал $F[x(t)]$ еще для одного случая Пусть

$$L(t-s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda^4} e^{i\lambda(t-s)}\,d\lambda,$$

$$K(t-s) = e^{-|t-s|}.$$

В этом случае

$$F[x(t)] = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{L_n}{K_n}\right|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\int_0^T x^2(t)\,dt + \frac{5}{4}\int_0^T\int_0^T e^{-|t-s|}\,x(t)\,x(s)\,dt\,ds - \right.$$

$$+ \frac{1}{25e^T - e^{-T}}\left[\frac{5}{2}e^{-T}\int_0^T\int_0^T e^{s-t}\,x(s)\,x(t)\,ds\,dt - \right.$$

$$- \frac{25e^{-T}}{2}\int_0^T\int_0^T \operatorname{ch}(s+t)\,x(s)\,x(t)\,dt\,ds + 10\,x(0)\,x(T) - e^{-T}(x^2(0)+x^2(T)) + $$

$$\left.\left. + 5\int_0^T (5e^t - e^{-t})\,[x(0)\,x(T-t) + x(T)\,x(t)]\,dt\right]\right\}.$$

Как видно из приведенных примеров, экспонента в $F[x(t)]$ содержит наряду с интегральными слагаемыми также «концевые» слагаемые вид

$x^2(0)$, $x^2(T)$ и т. п. Наличие этих концевых слагаемых объясняется тем, что процессы с рациональной спектральной плотностью являются компонентами многомерных марковских процессов. Для таких процессов значения реализации в концах отрезка $[0, T]$ и внутри него, грубо говоря, неравноправны. Это можно пояснить следующим образом. Для задачи обнаружения сигнала на фоне шума нам были бы полезны всякие сведения о наблюдаемом процессе, касающиеся его поведения вне рассматриваемого интервала $[0, T]$ (например, если бы мы знали все значения $x(t)$ при $t < 0$ и $t > T$, то можно было бы безошибочно решить вопрос о присутствии сигнала). Но наибольшую информацию о значениях процесса вне интервала $[0, T]$ несут естественно значения в концах интервала. Поэтому концевые значения реализации $x(t)$ входят в выражения для $F[x(t)]$ с бо́льшим весом, чем значения $x(t)$ при $0 < t < T$. Отметим, что при увеличении T концевые члены в $F[x(t)]$ играют все меньшую и меньшую роль.

Получив в явном виде выражение для $F[x(t)]$, можно эффективно решать не только задачу проверки статистических гипотез, но и задачу оценки неизвестных параметров по выборочной функции. Например, можно находить оценки максимального правдоподобия, обладающие известными оптимальными свойствами (см. [3], стр. 229). Мы здесь не будем останавливаться на этом вопросе.

2. НАХОЖДЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ $\ln F[\xi(t)]$

Найденный в § 1 функционал $F[x(t)]$ дает ответ на вопрос о том, какова должна быть оптимальная обработка наблюдаемых данных для проверки двух гипотез о случайном процессе. Интересным также является вопрос о вероятностях ошибок при использовании такой оптимальной обработки. Ответ на этот вопрос связан с нахождением распределения случайной величины $F[\xi(t)]$ при обеих гипотезах. Так как оптимальный критерий состоит в сравнении величины $F[\xi(t)]$ с некоторой пороговой константой П с последующим принятием гипотез H_0 и H_1 в зависимости от того, больше $F[\xi(t)]$, чем П, или меньше, то легко показать, что использование любой монотонной функции от $F[\xi(t)]$ с соответственным изменением константы П приведет к тем же вероятностям ошибок. Нам удобнее будет исследовать распределение случайной величины $\eta = \ln F[\xi(t)]$. Поскольку не существует прямых методов нахождения функции распределения η, приходится ограничиться нахождением характеристической функции случайной величины η. Мы покажем, как можно находить характеристическую функцию η в случае, когда $\overline{\eta_0(t)} = \overline{\eta_1(t)} = 0$. Последующее нахождение вероятностей ошибок можно осуществить, по-видимому, только при помощи численных методов. Заметим, что статистические моменты η можно найти, или разлагая ее характеристическую функцию в ряд, или же непосредственно, используя явный вид $F[\xi(t)]$.

Само собой разумеется, что в этом параграфе мы везде предполагаем выполнение условия (3). В противном случае вероятности ошибок равнялись бы нулю. Заметим, что способ нахождения характеристической функции η имеет много общего со способом нахождения характеристической функции случайной величины $\int_0^T \xi^2(t)\,dt$ (см. [9]).

В качестве координат процесса $\xi(t)$ возьмем коэффициенты Фурье по системе функций $\{\varphi_n(t)\}$:

$$\zeta_n = \int_0^T \xi(t)\,\varphi_n(t)\,dt,$$

где $\varphi_n(t)$ — собственные функции интегрального уравнения

$$\int_0^T K(t-s)\varphi(s)\,ds = \lambda \int_0^T L(t-s)\varphi(s)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{12}$$

Мы не будем рассматривать вопрос о «полноте» системы $\{\varphi_n(t)\}$, так как ставим себе целью скорее описать способы нахождения предела отношения правдоподобия и характеристической функции $\ln F[\xi(t)]$, чем исследовать пределы применимости этих способов и строго обосновать их. Во многих конкретных случаях, в частности в примере, рассмотренном в конце этого параграфа, можно непосредственно убедиться, что система $\{\varphi_n(t)\}$ такова, что совокупность координат $\{\zeta_n\}$ содержит всю информацию о $\xi(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Нормируем $\varphi_k(t)$ так, чтобы

$$\int_0^T\int K(t-s)\varphi_k(t)\varphi_k(s)\,dt\,ds = 1. \tag{13}$$

Используя методы, аналогичные тем, которые применяются в линейной алгебре для одновременного приведения двух квадратичных форм к диагональному виду (см., например, [14], стр. 252), нетрудно показать, что при таком выборе функций $\{\varphi_n(t)\}$ случайные величины ζ_n будут попарно независимыми и при гипотезе H_0 и при гипотезе H_1, т. е.

$$\langle \zeta_m \zeta_n \rangle_{H_0} = \int_0^T\int K(t-s)\varphi_m(t)\varphi_n(s)\,dt\,ds = 0, \quad m \neq n,$$

$$\langle \zeta_m \zeta_n \rangle_{H_1} = \int_0^T\int L(t-s)\varphi_m(t)\varphi_n(s)\,dt\,ds = 0 \quad m \neq n$$

(знак $\langle\ \rangle_{H_i}$ означает усреднение при осуществлении гипотезы H_i, $i = 0, 1$).

Из-за условия (13) дисперсия ζ_n при осуществлении гипотезы H_0 равна единице, а при осуществлении гипотезы H_1 равна $1/\lambda_n$.

Совместные плотности вероятностей величин $\zeta_1 \ldots \zeta_n$, соответствующие гипотезам H_0 и H_1, будут иметь вид

$$p_0(y_1 \ldots y_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n y_k^2\right\},$$

$$p_1(y_1 \ldots y_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{k=1}^n \lambda_k\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2\right\}.$$

Далее подставим в отношение правдоподобия $p_0(y_1 \ldots y_n)/p_1(y_1 \ldots y_n)$ значения реализации

$$x_i = \int_0^T x(t)\varphi_i(t)\,dt$$

и перейдем к пределу:

$$F[x(t)] = \left(\prod_{k=1}^\infty \lambda_k\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty x_k^2(\lambda_k - 1)\right\}.$$

Нас интересует характеристическая функция случайной величины

$$\eta = \ln F[\xi(t)] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty \zeta_k^2(\lambda_k - 1) - \frac{1}{2}\ln\left(\prod_1^\infty \lambda_k\right).$$

При осуществлении гипотезы H_0 найдем характеристическую функцию η, которую обозначим $\chi_0(t)$:

$$\chi_0(t) = \exp\left\{-\frac{it}{2}\ln\prod_{k=1}^{\infty}\lambda_k\right\}\left\langle\exp\left\{\frac{it}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k^2(\lambda_k-1)\right\}\right\rangle_{H_0}.$$

Так как ζ_k независимы, то

$$\chi_0(t) = \exp\left\{-\frac{it}{2}\ln\prod_{k=1}^{\infty}\lambda_k\right\}\prod_{k=1}^{\infty}\left\langle\exp\left\{\frac{it\zeta_k^2}{2}(\lambda_k-1)\right\}\right\rangle_{H_0}.$$

Далее легко проверить, что

$$\left\langle\exp\left\{\frac{it\zeta_k^2}{2}(\lambda_k-1)\right\}\right\rangle_{H_0} = \frac{1}{\sqrt{1-it(\lambda_k-1)}},$$

причем аргумент полученной функции выбирается так, чтобы при $t=0$ функция обращалась в $+1$. Отсюда

$$\chi_0(t) = \frac{\exp\left\{-\frac{it}{2}\ln\prod_{k=1}^{\infty}\lambda_k\right\}}{\sqrt{\prod_{k=1}^{\infty}[1-it(\lambda_k-1)]}} = \frac{\exp\left\{-\frac{it}{2}\ln\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{v_k}\right)\right\}}{\sqrt{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{it}{v_k}\right)}}, \qquad (14)$$

где $v_k = 1/(\lambda_k-1)$. Наша задача состоит теперь в том, чтобы получить бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{it}{v_k}\right)$ в замкнутом виде. Это делается вполне аналогично тому, как находится количество информации в одном гауссовском процессе относительно другого в работе [10]. Сначала устанавливается, что v_k являются нулями некоторой целой функции $D(v)$ экспоненциального типа и порядка меньше единицы, которую можно явно выписать. По теореме Адамара (см. [11]) для целой функции $D(v)$ экспоненциального типа и порядка меньше единицы имеет место разложение на множители

$$D(v) = D(0)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{v}{v_k}\right), \text{ где } v_k \text{ — нули } D(v).$$

Отсюда находим нужные нам бесконечные произведения:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{it}{v_k}\right) = \frac{D(it)}{D(0)}, \quad \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{v_k}\right) = \frac{D(-1)}{D(0)}.$$

Проиллюстрируем нахождение $\chi_0(t)$ для случая, когда

$$K(t-s) = \frac{1}{\alpha}\exp\{-\alpha|t-s|\},$$

$$L(t-s) = \frac{1}{\beta}\exp\{-\beta|t-s|\}.$$

Ищем решение уравнения (12) в виде

$$\varphi(t) = \widetilde{\varphi}(t) + a\delta(t) + b\delta(T-t).$$

Применяя к обеим частям равенства

$$\frac{1}{\pi}\int_0^T \widetilde{\varphi}(s)\,ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(t-s)}}{\alpha^2+\lambda^2}\,d\lambda + \frac{a}{\alpha}e^{-\alpha t} + \frac{b}{\alpha}e^{-\alpha(T-t)} =$$

$$= \frac{1+\frac{1}{v}}{\pi}\int_0^T \widetilde{\varphi}(s)\,ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(t-s)}}{\beta^2+\lambda^2}\,d\lambda + \left(1+\frac{1}{v}\right)\frac{a}{\beta}e^{-\beta t} + \left(1+\frac{1}{v}\right)\frac{b}{\beta}e^{-\beta(T-t)} \quad (15)$$

оператор $\left(-\frac{d^2}{dt^2}+\alpha^2\right)\left(-\frac{d^2}{dt^2}+\beta^2\right)$, получим дифференциальное уравнение

$$\widetilde{\varphi}''(t) - [\alpha^2 + v(\alpha^2-\beta^2)]\,\widetilde{\varphi}(t) = 0,\ 0<t<T.$$

Отсюда

$$\widetilde{\varphi}(t) = C_1 e^{\Lambda t} + C_2 e^{-\Lambda t},$$

где

$$\Lambda = \sqrt{\alpha^2 + v(\alpha^2-\beta^2)}. \quad (16)$$

Применим к (15) оператор $\frac{d^r}{dt^r}\left(\frac{d}{dt}+\alpha\right)\left(\frac{d}{dt}+\beta\right)$, $r=0,\ 1$ и положим $t=T$. Получим два уравнения

$$\widetilde{\varphi}(T) - b(\alpha+\beta) = 0,$$
$$\widetilde{\varphi}'(T) + (\alpha+\beta)\,\widetilde{\varphi}(T) + b\{(\alpha^2-\beta^2)v - \beta(\alpha+\beta)\} = 0. \quad (17)$$

Аналогично получим еще два уравнения в точке $t=0$:

$$\widetilde{\varphi}(0) - a(\alpha+\beta) = 0,$$
$$\widetilde{\varphi}'(0) - (\alpha+\beta)\,\widetilde{\varphi}(0) - a\{(\alpha^2-\beta^2)v - \beta(\alpha+\beta)\} = 0. \quad (18)$$

Подставляя в уравнения (17) и (18) $\widetilde{\varphi}(0)$, $\widetilde{\varphi}'(0)$, $\widetilde{\varphi}(T)$ и $\widetilde{\varphi}'(T)$ в виде (16), получим для C_1, C_2, a, b уравнения

$$C_1 e^{\Lambda T} + C_2 e^{-\Lambda T} - b(\alpha+\beta) = 0,$$
$$C_1 e^{\Lambda T}[\Lambda + (\alpha+\beta)] + C_2 e^{-\Lambda T}[-\Lambda + (\alpha+\beta)] + b\{(\alpha^2-\beta^2)v - \beta(\alpha+\beta)\} = 0,$$
$$C_1 + C_2 - a(\alpha+\beta) = 0,$$
$$C_1[\Lambda - (\alpha+\beta)] - C_2[\Lambda + (\alpha+\beta)] - a\{(\alpha^2-\beta^2)v - \beta(\alpha+\beta)\} = 0.$$

Определитель системы равен

$$D(v) = -(\alpha+\beta^2)\{e^{\Lambda T}[\Lambda + (\alpha-\beta)v + \alpha]^2 - e^{-\Lambda T}[\Lambda - (\alpha-\beta)v - \alpha]^2\}.$$

Функция $D(v)$ содержит один лишний корень $v=\alpha^2/(\beta^2-\alpha^2)$, не являющийся собственным значением уравнения (15). Если $v=\alpha^2/(\beta^2-\alpha^2)$, то общее решение $\widetilde{\varphi}(t)$ запишется не в виде (16), а в виде многочлена второй степени. Разделив $D(v)$ на Λ, избавимся от этого корня. Окончательно для $\chi_0(t)$ имеем

$$\chi_0(t) = \sqrt{\frac{D(0)\,\Lambda(it)}{D(it)\,\Lambda(0)}}\exp\left\{-\frac{it}{2}\ln\frac{D(-1)\,\Lambda(0)}{D(0)\,\Lambda(-1)}\right\} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\alpha\Lambda}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{it}{2}}\exp\left\{\frac{it(\alpha-\beta)+\alpha}{2}T\right\}}{\sqrt{e^{\Lambda T}[\Lambda + it(\alpha-\beta)+\alpha]^2 - e^{-\Lambda T}[\Lambda - it(\alpha-\beta)-\alpha]^2}}, \quad (19)$$

причем в этом равенстве $\Lambda = \sqrt{\alpha^2 + it(\alpha^2-\beta^2)}$, $\Lambda(0)=\alpha$, $\Lambda(-1)=\beta$.

Аналогичным способом можно было бы и в случае произвольных рациональных спектральных плотностей показать, что значения v_k в выражении (14) являются нулями функции, удовлетворяющей теореме Адамара. Эту функцию, так же как и в рассмотренном нами примере, можно явно выписать в виде некоторого определителя n, следовательно, получить характеристическую функцию $\ln F[\xi(t)]$ в замкнутом виде. Решение уравнения (12) надо искать в виде

$$\varphi(t) = \widetilde{\varphi}(t) + \sum_{k=0}^{l} a_k \delta^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{l-1} b_k \delta^{(k)}(t-T),$$

где l — разность степеней $P_0(i\lambda)$ и $Q_0(i\lambda)$, а $\widetilde{\varphi}t$ — решение уравнения

$$P_1\left(\frac{d}{dt}\right) P_1\left(-\frac{d}{dt}\right) Q_0\left(\frac{d}{dt}\right) Q_0\left(-\frac{d}{dt}\right) \widetilde{\varphi}(t) =$$
$$= \lambda P_0\left(\frac{d}{dt}\right) P_0\left(-\frac{d}{dt}\right) Q_1\left(\frac{d}{dt}\right) Q_1\left(-\frac{d}{dt}\right) \widetilde{\varphi}(t).$$

Сделаем еще одно замечание относительно нахождения распределения $\ln F[\xi(t)]$. Из некоторых общих соображений можно заключить, что при $T \to \infty$ $\ln F[\xi(t)]$ будет асимптотически нормальной величиной.

В частности, для рассмотренного нами примера нетрудно показать, что

$$\exp\left\{-it\frac{a_k}{b_k}\right\} \chi_k\left(\frac{t}{b_k}\right) \to \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}$$

при $T \to \infty$, $k = 0,1$. Здесь $a_0 = \dfrac{(\alpha-\beta)^2 T}{4\alpha}$;

$$a_1 = -\frac{(\alpha-\beta)^2 T}{4\beta}; \quad b_0 = \frac{|\beta^2-\alpha^2|\sqrt{T}}{(2\alpha)^{3/2}}; \quad b_1 = \frac{|\beta^2-\alpha^2|\sqrt{T}}{(2\beta)^{3/2}}.$$

Параметры предельного нормального распределения можно найти, вычисляя среднее и дисперсию $\ln F[\xi(t)]$, после того как для него получено явное выражение, или же разлагая в ряд Тейлора характеристическую функцию $\ln F[\xi(t)]$.

Мы не будем в настоящей работе рассматривать вопрос о погрешности, которая возникает при замене истинного распределения $\ln F[\xi(t)]$ асимптотическим. Для оценки этой погрешности, по-видимому, лучше всего использовать явный вид характеристической функции $\ln F[\xi(t)]$.

3. О БОЛЕЕ РЕАЛИСТИЧНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛА НА ФОНЕ ПОМЕХ

Как уже отмечалось в § 1, при выполнении условия (2) можно безошибочно узнать, какая из гипотез осуществляется. Рассмотрим подробнее на примере, какими способами это можно сделать. Пусть $K(t-s) = \frac{a}{\alpha} e^{-\alpha|t-s|}$, $L(t-s) = \frac{b}{\alpha} e^{-\alpha|t-s|}$ и $a > b$. В этом случае условие (2) выполнено, так как

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left|\frac{Q_0(i\lambda) P_1(i\lambda)}{P_0(i\lambda) Q_1(i\lambda)}\right|^2 = \frac{a}{b} > 1.$$

Составим, следуя Слепяну [4], сумму

$$Y_n[x(t)] = \sum_{j=1}^{n} \left\{x\left(\frac{Tj}{n}\right) - x\left(\frac{T(j-1)}{n}\right)\right\}^2 \qquad (20)$$

и устремим $n \to \infty$. Тогда, как показано в [4], для всех реализаций процесса $\eta_0(t)$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} Y_n[x(t)] = 2aT,$$

а для всех реализаций процесса $\eta_1(t)$ — равенство

$$\lim_{n\to\infty} Y_n[x(t)] = 2bT.$$

Поскольку $a > b$, то при любом T можно безошибочно узнать, какая из гипотез верна. Заметим, что в случае выполнения условия (2) можно предложить различные варианты безошибочной проверки гипотез H_0 и H_1. Однако на практике ни один из этих вариантов использовать нельзя, так как и значения реализации и спектральные плотности процессов $\eta_0(t)$ и $\eta_1(t)$ бывают известными лишь с ограниченной точностью.

Парадокс безошибочной проверки гипотез при условии (2) основан на использовании различия в высокочастотной части спектров. При этом используются локальные свойства выборочных функций процесса, существенно связанные лишь с асимптотическим поведением спектра, а не с его поведением в конечной области частот. В этих случаях безошибочная проверка гипотез фактически основывается на столь высоких частотах, которые не имеют физического смысла.

Для того чтобы задача проверки гипотез относительно выборочной функции случайного процесса стала более реалистичной, Л. А. Вайнштейн предложил считать, что кроме процессов $\eta_0(t)$ или $\eta_1(t)$ каждый раз обязательно присутствует белый шум с одной и той же малой спектральной плотностью. При добавлении белого шума условие (3) выполняется и парадоксы безошибочной проверки гипотез исчезают. Белый шум не дает возможности использовать информацию, которую несут бесконечно высокие частоты, представляющие собой лишь математическую абстракцию.

Итак, будем считать, что корреляционные функции, соответствующие гипотезам H_0 и H_1, имеют вид

$$\widetilde{K}(t-s) = N\delta(t-s) + \frac{a}{\alpha}e^{-\alpha|t-s|}, \quad \widetilde{L}(t-s) = N\delta(t-s) + \frac{b}{\alpha}e^{-\alpha|t-s|},$$

где N — малое число; $\delta(t-s)$ — функция Дирака, являющаяся корреляционной функцией белого шума. Способом, изложенным в § 1, находим $F_N[x(t)]$:

$$F_N[x(t)] = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\widetilde{L}_n}{\widetilde{K}_n}\right|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2N^2}\int_0^T\int\left[\frac{a}{\alpha_1}e^{-\alpha_1|t-s|} - \frac{b}{\beta_1}e^{-\beta_1|t-s|}\right]\times\right.$$

$$\times\, x(t)\,x(s)\,dt\,ds + \frac{1}{2N}\int_0^T\int\left[\frac{e^{-2\alpha_1 T}(\alpha_1-\alpha)^3\operatorname{ch}\alpha_1(t-s)}{\alpha_1(\alpha+\alpha_1)\left[1-\left(\frac{\alpha_1-\alpha}{\alpha_1+\alpha}\right)^2 e^{-2\alpha_1 T}\right]} -\right.$$

$$-\left.\frac{e^{-2\beta_1 T}(\beta_1-\beta)^3\operatorname{ch}\beta_1(t-s)}{\beta_1(\beta+\beta_1)\left[1+\left(\frac{\beta_1-\beta}{\beta_1+\beta}\right)^2 e^{-2\beta_1 T}\right]}\right]x(t)\,x(s)\,dt\,ds +$$

$$+\frac{1}{2N}\int_0^T\int\left[\frac{e^{-\alpha_1 T}(\alpha_1-\alpha)^2\operatorname{ch}\alpha_1(s+t-T)}{\alpha_1\left[1-\left(\frac{\alpha_1-\alpha}{\alpha_1+\alpha}\right)^2 e^{-2\alpha_1 T}\right]} -\right.$$

$$-\left.\left.\frac{e^{-\beta_1 T}(\beta_1-\beta)^2\operatorname{ch}\beta_1(s+t-T)}{\beta_1\left[1-\left(\frac{\beta_1-\beta}{\beta_1+\beta}\right)^2 e^{-2\beta_1 T}\right]}\right]x(t)\,x(s)\,dt\,ds\right\}, \qquad (21)$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2a}{N}+\alpha^2} \text{ и } \beta_1 = \sqrt{\frac{2b}{N}+\alpha^2}.$$

При выполнении условий

$$2\frac{a}{\alpha} \gg N\alpha, \quad 2\frac{b}{\alpha} \gg N\alpha, \tag{22}$$

$$\alpha T \gg 1 \tag{23}$$

полученное выражение для $F_N[x(t)]$ можно сильно упростить. Физически условие $2\frac{a}{\alpha} \gg N\alpha$ выражает естественное требование малости энергии добавляемого белого шума в полосе частот от 0 до α (т. е. в той полосе, где существенно отлична от нуля спектральная плотность $a/\pi(\alpha^2 + \lambda^2)$) по сравнению с полной энергией спектральной плотности $a/\pi(\alpha^2 + \lambda^2)$, равной a/α. Условие $\alpha T \gg 1$ означает, что на интервале наблюдения $[0, T]$ укладывается много интервалов корреляции процесса с корреляционной функцией $\frac{a}{\alpha} e^{-\alpha|t-s|}$.

Условия (22) и (23) обеспечивают малость второго и третьего слагаемых в экспоненте (21) по сравнению с первым слагаемым. Таким образом, при столь малом N и таком T, что выполняются условия (22) и (23), будем иметь

$$F_N[x(t)] \simeq \lim \left|\frac{\widetilde{L}_n}{\widetilde{K}_n}\right|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2N^2}\int_0^T\int_0^T \left[\frac{a}{\alpha_1} e^{-\alpha_1|t-s|} - \frac{b}{\beta_1} e^{-\beta_1|t-s|}\right] x(t)\, x(s)\, dtds\right\}.$$

Можно показать, что для любой непрерывной функции $x(t)$ при $N \to 0$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка по N имеет место приближенное равенство

$$F_N[x(t)] \simeq \lim \left|\frac{\widetilde{L}_n}{\widetilde{K}_n}\right|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{C}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\left[\frac{T}{2\tau_0}\right]} [x(2\tau_0 j) - x(2\tau_0(j-1))]^2\right\}, \tag{24}$$

где $\tau_0 = \dfrac{\ln\frac{a\beta_1}{b\alpha_1}}{\alpha_1 - \beta_1} \simeq \dfrac{\ln\frac{a}{b}}{2\sqrt{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}\sqrt{N}$; C — некоторая не зависящая от N константа. В экспоненте (24) стоит сумма вида (20). Однако из-за того, что квадрат белого шума не имеет смысла, в выражение (24 нельзя подставлять $x(t)$, содержащую белый шум. Впрочем, если предположить, что при «урезании» белого шума (например так, что спектральная плотность становится равной $f(\lambda) = \begin{cases} N, & |\lambda| < N_0 \\ \dfrac{NN_0^2}{\lambda^2}, & |\lambda| \geqslant N_0 \end{cases}$ для достаточно большого N_0 оптимальный способ проверки гипотез мало изменится, то выражение (24) будет давать приблизительно оптимальный способ обработки данных для проверки гипотез. Для «урезанного» белого шума уже имеет смысл возведение в квадрат. Интересно отметить, что предложенный Слепяном способ, который при выполнении условия (2) дает возможность безошибочно проверять гипотезы, при добавлении малого урезанного белого шума останется оптимальным, если шаг разбиения суммы (20) не устремлять к нулю, а выбрать в соответствии с величиной спектральной плотности шума. При уменьшении плотности шума N шаг разбиения $2\tau_0$ уменьшается пропорционально $\sqrt{N}$. Характеристические функции $\ln F_N[\xi(t)]$, посчитанные по способу, предложенному в § 2, будут иметь вид

$$\chi_0^{(N)}(t) = \exp\left\{-\frac{it}{2}\ln\frac{D(-1)}{D(0)}\right\}\sqrt{\frac{D(0)}{D(it)}},$$

где $$D(v) = \frac{e^{k(v)T}[k(v) - \alpha]^2 - e^{-k(v)T}[k(v) + \alpha]^2}{k(v)};$$

$$k(v) = \sqrt{\alpha^2 + \frac{2b}{N} + \frac{2v}{N}(b - a)};$$

$\chi_1^{(N)}(t)$ получается из $\chi_0^{(N)}(t)$ заменой a_1, b, t на $b_1, a, -t$ соответственно.

Обозначая преобразования Фурье $\chi_0^{(N)}(t)$ и $\chi_1^{(N)}(t)$ через $p_0^{(N)}(x)$ и $p_1^{(N)}(x)$, можно записать вероятности ошибок первого и второго родов в такой более реалистично поставленной задаче в виде $\int_{-\infty}^{H} p_0^{(N)}(x)\,dx$ и $\int_{H}^{\infty} p_1^{(N)}(x)\,dx$. Можно показать, что хотя при фиксированном T и $N \to 0$ эти вероятности и стремятся к нулю, наоборот, при фиксированном N и $T \to 0$ они возрастают до некоторых предельных значений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены на конечном отрезке времени гауссовские стационарные процессы с рациональной спектральной плотностью. Найдены выражения, показывающие, какова должна быть оптимальная обработка выборочной функции случайного процесса для проверки двух конкурирующих гипотез относительно этого процесса. Указан способ нахождения в замкнутом виде характеристической функции предельного отношения правдоподобия. Рассмотрен один подход к задаче проверки двух гипотез относительно выборочной функции процесса, делающий рассматриваемую задачу более реалистичной.

Автор выражает благодарность Р. Л. Добрушину, под руководством которого была выполнена работа, за многочисленные и полностью использованные советы, а также М. А. Исаковичу за полезные замечания при обсуждении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Питерсон, Бердсал, Фокс, Теория обнаружения сигналов, Сб. переводов под ред. А. А. Харкевича, Теория информации и ее приложения, ГИФМЛ, 1959.
2. D. Middleton, On the detection of stochastic signals in additive normal noise, P. I, IRE Trans., 1957, IT-3, 2, 86.
3. U. Grenander, Stochastic processes and statistical inference, Ark. Mat., 1950, 1, 195.
4. D. Slepian, Some comments on the detection of Gaussian signals in Gaussian noise, IRE Trans., 1958, IT-4, 2, 65.
5. А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, 1936.
6. L. Zadeh, J. Ragazzini, Optimum filters for the detection of signals in noise, Proc. I.R. E., 1952, 40, 1223.
7. E. Reich, P. Swerling, Detection of sine wave in Gaussian noise, J. Appl. Phys., 1953, 24, 3, 289.
8. R. Davis, The detectability of random signals in the presence of noise, IRE Trans., 1954, PGIT-3, 52.
9. D. Slepian, Fluctuation of random noise power, Bell System Techn. J., 1958, 37, 1, 163.
10. И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, О вычислении количества информации о случайной функции, Успехи матем. наук, 1957, 12, 1, 3.
11. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, ГИТТЛ, 1950.
12. W. Davenport, W. Root, An introduction to the theory of random signals and noise, 1958, N. Y.
13. C. Striebel, Densities for stochastic processes, Ann. Math. Stat, 1959, 30, 2, 559.
14. Г. Е. Шилов, Введение в теорию линейных пространств, ГИТТЛ, 1952.

Механико-математический факультет
Московского государственного
университета им. М. В. Ломоносова
Кафедра теории вероятностей

Поступила в редакцию
3 XII 1959

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ НАКОПИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИХ РАБОТЫ

Ю. С. Лезин

Рассчитано отношение сигнал/шум на выходе одного и нескольких накопительных устройств с задержанной обратной связью, а также проанализировано влияние полосы пропускания и коэффициента обратной связи этих устройств на отношение сигнал/шум.

ВВЕДЕНИЕ

Эффективность работы накопительных устройств, предназначенных для увеличения отношения сигнал/шум, должна оцениваться величиной этого отношения на их выходе при заданных энергии сигнала и интенсивности энергетического спектра шума на входе или же коэффициентом увеличения отношения сигнал/шум этими устройствами.

Накопитель с задержанной обратной связью [1], блок-схема которого изображена на рис. 1 [2], характеризуется двумя параметрами: полосой пропускания фильтра ΔF и коэффициентом обратной связи m (на достаточно низких частотах). Рассмотрим влияние этих параметров на эффективность работы накопителей. Будем предполагать, что на вход накопителей поступают последовательность одинаковых по амплитуде U_1 и длительности τ прямоугольных импульсных сигналов, число которых N столь велико, что

$$m^N \ll 1,$$

а белый шум с нормальным распределением. Кроме того, полосу пропускания фильтра ΔF полагаем много больше частоты повторения импульсных сигналов $F = 1/T$.

1. ОДИН НАКОПИТЕЛЬ С ЗАДЕРЖАННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

1. Основные соотношения. Как показано в [3], максимальная амплитуда импульсного сигнала на выходе одного накопителя равна

$$U_2 = \frac{U_1}{1-m}\left[1 - e^{-2\pi\tau\Delta F(1-m)}\right]. \qquad (1)$$

В [2] установлено, что шум на выходе указанного накопителя имеет мощность

$$\sigma_2^2 = \frac{\pi^2 a \Delta F}{\sqrt{1-m^2}}, \qquad (2)$$

где a — интенсивность энергетического спектра шума на входе. Поэтому отношение мощностей сигнал/шум на выходе равно

$$A = A_0 \frac{\sqrt{1-m^2}}{(1-m)^2} \frac{1}{\pi b}\left[1 - e^{-2\pi b(1-m)}\right]^2, \qquad (3)$$

где $A_0 = U_1^2\tau/\pi a$ — отношение сигнал/шум на выходе оптимального фильтра для одиночного импульсного сигнала [4]; $b = \Delta F\tau$ — произведение полосы пропускания фильтра на длительность импульса (его можно называть безразмерной полосой пропускания). Следовательно, выигрыш в

отношении сигнал/шум, обеспечиваемый таким накопителем по сравнению с оптимальным фильтром для одиночного импульсного сигнала, равен

$$B_1 = \frac{\sqrt{1-m^2}}{(1-m)^2}\,\frac{1}{\pi b}\,[1-e^{-2\pi b(1-m)}]^2. \qquad (4)$$

2. Влияние полосы пропускания. Исследуя (4) на максимум относительно b, определим оптимальную полосу пропускания

$$b_1 = \Delta F_1 \tau = \frac{0{,}200}{1-m}\,. \qquad (5)$$

Она резко увеличивается по мере приближения коэффициента обратной связи к единице (кривая *1* на рис. 1).

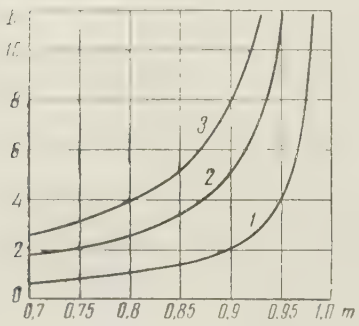


Рис. 1. Зависимости оптимальной полосы пропускания от коэффициента обратной связи для одного, двух и трех накопителей

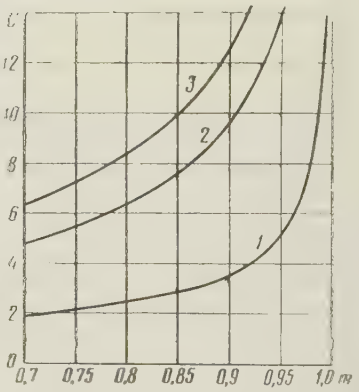


Рис. 2. Зависимости максимального выигрыша от коэффициента обратной связи для одного, двух и трех накопителей

Максимальное значение выигрыша в отношении сигнал/шум за счет использования накопителя при заданном коэффициенте обратной связи достигается при оптимальной полосе и равно

$$C_1 = B_1(b = b_1) = 0{,}815\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}\,. \qquad (6)$$

Этот выигрыш быстро растет при приближении коэффициента обратной связи к единице (кривая *1* на рис. 2) и уже при $m = 0{,}9$ составляет 3,5 раза. Получение большего выигрыша требует увеличения коэффициента обратной связи, что на практике может привести к неустойчивой работе накопителя.

Величина потерь в отношении сигнал/шум вследствие неоптимальности полосы пропускания определяется отношением B_1/C_1, которое согласно (4) и (6) равно:

$$\frac{B_1}{C_1} = 1{,}954\,\frac{(1-e^{-1{,}256z})^2}{z}\,, \qquad (7)$$

где $z = b/b_1 = \Delta F/\Delta F_1$ — отношение полосы пропускания к ее оптимальному значению. Из зависимости величины потерь в отношении сигнал/шум от z (кривая *1* на рис. 3) следует, что оптимальное значение полосы пропускания не является критичным.

3. Влияние коэффициента обратной связи. Исследуя (4) на максимум относительно m, определим оптимальное значение коэффициента обратной связи в зависимости от безразмерной полосы пропускания (кривая *1* на рис. 4). С ростом полосы пропускания оптимальное значение коэффициента обратной связи сначала быстро, а затем мед-

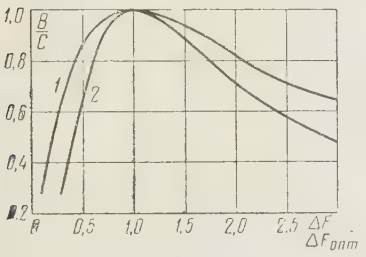


Рис. 3. Зависимости отношения получаемого выигрыша к максимальному от отношения полосы пропускания к оптимальной полосе для одного и двух накопителей

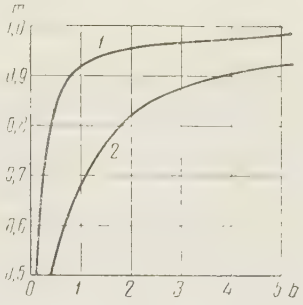


Рис. 4. Зависимости оптимального значения коэффициента обратной связи от полосы пропускания для одного и двух накопителей

ленно возрастает, стремясь к единице. При $b = 1$ оно составляет 0,917, а при $b = 2$ — уже 0,957. Максимальный выигрыш в отношении сигнал/шум увеличивается с расширением полосы пропускания (кривая *1* на рис. 5) и составляет 3,06 при $b = 1$ и 4,37 при $b = 2$.

На рис. 6 изображено семейство зависимостей выигрыша в отношении сигнал/шум по мощности от величины коэффициента обратной связи при различных значениях полосы пропускания. Из рассмотрения этих зависимостей следует, что отклонение коэффициента обратной связи от оптимального значения приводит к небольшому снижению отношения сигнал/шум при $b < 0{,}5$ и к резкому уменьшению этого отношения при $b > 1$, причем степень этого уменьшения возрастает с увеличением полосы пропускания.

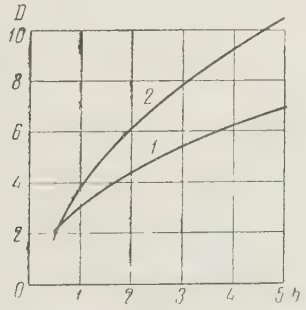


Рис. 5

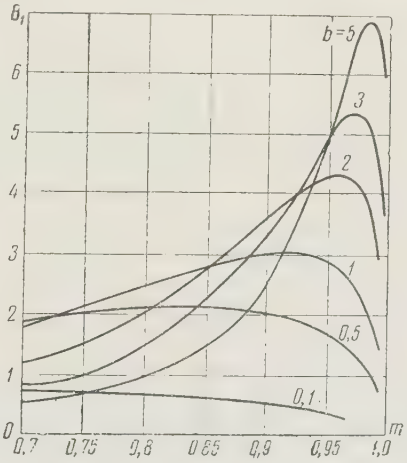


Рис. 6

Рис. 5. Зависимости максимального выигрыша от полосы пропускания для одного и двух накопителей

Рис. 6. Семейство зависимостей выигрыша в отношении сигнал/шум от коэффициента обратной связи для различных значений полосы пропускания в случае одного накопителя

4. Выигрыш, обеспечиваемый накопителем по сравнению с фильтром нижних частот. Для выяснения эффективности накопления по сравнению с обычно применяемой частотной фильтрацией определим выигрыш, обеспечиваемый накопителем по сравнению с фильтром нижних частот, передаточная функция которого имеет вид

$$K^*(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{2\pi\Delta f}}, \tag{8}$$

где Δf — полоса пропускания этого фильтра.

Легко показать, используя (4) при $m = 0$, а также (6), что накопитель обеспечивает по сравнению с фильтром нижних частот следующий максимальный выигрыш в отношении сигнал/шум:

$$R_1 = \frac{C_1}{B_1(m=0;\, b=q)} = \frac{2{,}56q}{(1-e^{-2\pi q})^2}\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}, \tag{9}$$

где $q = \Delta f\tau$ - безразмерная полоса фильтра нижних частот. В частности при $q = 1$

$$R_{11} = 2{,}57\sqrt{\frac{1+m}{1-m}} = 3{,}15\,C_1, \tag{10}$$

а при оптимальной полосе $q = 0{,}2$ (которую легко определить из (5), положив в нем $m = 0$ и заменив b на q)

$$R_{12} = \sqrt{\frac{1+m}{1-m}} = 1{,}227\,C_1. \tag{11}$$

Эти выигрыши при $m = 0{,}9$ составляют соответственно 11,2 и 4,36.

Следовательно, применение одного накопителя с задержанной обратной связью по сравнению с применением фильтра дает сравнительно большой выигрыш в отношении сигнал/шум.

2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ВКЛЮЧЕННЫЕ НАКОПИТЕЛИ С ЗАДЕРЖАННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

1. Два накопителя. Пользуясь выражениями для максимальной амплитуды импульсного сигнала и мощности шума на выходе двух одинаковых, последовательно включенных накопителей, полученными соответственно в работах [3] и [2], определим выигрыш в отношении сигнал/шум, обеспечиваемый двумя накопителями по сравнению с оптимальным фильтром для одиночного импульсного сигнала:

$$B_2 = \frac{4}{\pi b}\,\frac{(1-m^2)^{5/2}}{(1-m)^4(2+m^2)}\{1-[1+2\pi b(1-m)]\,e^{-2\pi b(1-m)}\}^2. \tag{12}$$

Оптимальная полоса пропускания в случае двух накопителей

$$b_2 = \Delta F_2\tau = \frac{0{,}512}{1-m} \tag{13}$$

возрастает по мере приближения m к единице (кривая *2* на рис. 1), как и при применении одного накопителя, но в отличие от последнего случая она в 2,56 раза больше.

При оптимальной полосе пропускания двух накопителей выигрыш в отношении сигнал/шум максимален:

$$C_2 = 1{,}714\,\frac{(1+m)^2}{2+m^2}\left(\frac{1+m}{1-m}\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Он растет по мере приближения коэффициента обратной связи к единице (кривая *2* на рис. 2) и при $m = 0{,}9$ составляет 9,56.

Дополнительный максимальный выигрыш за счет применения второго накопителя равен

$$G_2 = \frac{C_2}{C_1} = 2{,}10\,\frac{(1+m)^2}{2+m^2} \qquad (15)$$

при $0{,}7 < m < 1$

$$G_2 \simeq 1{,}6 + 1{,}2m.$$

Этот выигрыш в указанном интервале m монотонно возрастает от 2,44 до 2,80.

Итак, максимальное отношение сигнал/шум на выходе двух накопителей в 2,5—2,8 раза больше, чем на выходе одного накопителя. Однако при этом заметно усложняется накопительное устройство и требуется расширение полосы пропускания в 2,56 раза.

Рассмотрение зависимости потерь в отношении сигнал/шум вследствие неоптимальности полосы пропускания от отношения полосы пропускания к оптимальной (кривая *2* на рис. 3) показывает, что в случае двух накопителей оптимальная полоса пропускания оказывается более критичной, чем при одном накопителе.

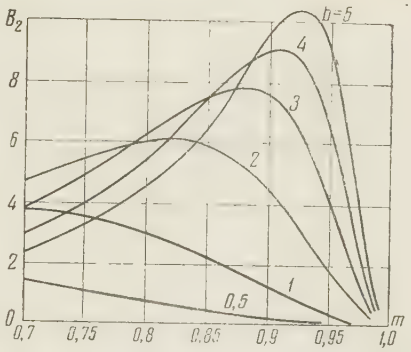


Рис. 7. Семейство зависимостей выигрыша в отношении сигнал/шум от коэффициента обратной связи для различных значений полосы пропускания в случае двух накопителей

Оптимальный коэффициент обратной связи при двух накопителях возрастает с увеличением полосы пропускания (кривая *2* на рис. 4), но его величина при той же полосе пропускания значительно меньше, чем при одном накопителе. Следовательно, применяя два накопителя для обеспечения большого выигрыша в отношении сигнал/шум (при заданной полосе) нет необходимости в доведении коэффициента обратной связи до величины, близкой к единице.

Максимальный выигрыш в отношении сигнал/шум при двух накопителях увеличивается с ростом полосы быстрее (кривая *2* на рис. 5), чем при одном накопителе. Дополнительный выигрыш за счет второго накопителя несколько возрастает с увеличением полосы и при $b = 3$—5 составляет примерно 1,5.

На рис. 7 представлено семейство зависимостей выигрыша в отношении сигнал/шум по мощности от величины коэффициента обратной связи при шести значениях полосы пропускания. Из рассмотрения этого семейства следует, что максимумы зависимостей при $b > 1$ являются более тупыми, чем при одном накопителе (см. рис. 6). Следовательно, оптимальное значение коэффициента обратной связи в этом случае менее критично.

2. Т р и н а к о п и т е л я. Используя результаты, полученные в работах [3] и [2] соответственно для максимальной амплитуды импульсного сигнала и мощности шума на выходе трех одинаковых, последовательно включенных накопителей, определим выигрыш за счет трех накопителей по сравнению с применением оптимального фильтра для одиночного импульсного сигнала:

$$B_3 = \frac{64}{3\pi b}\,\frac{(1-m^2)^{9/2}}{(1-m)^6(8+24m^2+3m^4)}\,\{1-[1+2\pi b\,(1-m)+$$

$$+\,2\pi^2 b^2\,(1-m)^2]\,e^{-2\pi b(1-m)}\}^2. \qquad (16)$$

При трех накопителях оптимальная полоса пропускания возрастает с увеличением коэффициента обратной связи (кривая *3* на рис. 1), но ее величина больше, чем при одном и двух накопителях, соответственно в 3,92 и 1,53 раза. Зависимость максимального выигрыша в отношении сигнал/шум за счет трех накопителей от величины коэффициента обратной связи

$$C_3 = \frac{6{,}56\,(1+m)}{8+24m^2+3m}\left(\frac{1+m}{1-m}\right)^{1/2} \qquad (17)$$

проходит несколько выше (кривая *3* на рис. 2), чем в случае двух накопителей.

Применение третьего накопителя дает дополнительный выигрыш

$$G_3 = \frac{C_3}{C_2} = 3{,}8\,\frac{(1+m)^2\,(2+m^2)}{8+24m^2+3m}\,, \qquad (18)$$

величина которого равна примерно 1,3 при $m = 0{,}7—1{,}0$.

Таким образом, применение третьего накопителя позволяет получить сравнительно небольшой выигрыш в отношении сигнал/шум. Поскольку при этом требуется значительное усложнение накопительного устройства, применение третьего накопителя является нецелесообразным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше установлено, что полоса пропускания фильтров и коэффициент обратной связи накопителей с задержанной обратной связью имеют оптимальные значения, при которых они работают наиболее эффективно.

Оптимальное значение полосы пропускания резко возрастает по мере приближения коэффициента обратной связи к единице; оно малокритично при одном накопителе и более критично при двух накопителях. Увеличение числа накопителей до двух и трех приводит к расширению оптимальной полосы соответственно в 2,56 и 3,92 раза.

Максимальный выигрыш в отношении сигнал/шум за счет применения накопителей по сравнению с оптимальным фильтром для одиночного импульсного сигнала и с частотными фильтрами возрастает с приближением коэффициента обратной связи к единице и с увеличением числа накопителей. При $m = 0{,}9$ величина этого выигрыша по сравнению с оптимальной фильтрацией одиночного импульсного сигнала составляет для одного, двух и трех накопителей соответственно 3,5; 9,56 и 12,5 раза по мощности.

Применение второго накопителя дает дополнительный выигрыш 2,4—2,8 раза, а третьего — на 30%. Поэтому применение второго накопителя в ряде случаев может быть оправдано несмотря на заметное усложнение схемы устройства, а применение третьего — нецелесообразно.

Дополнительным преимуществом использования второго накопителя является меньшая критичность оптимального значения коэффициента обратной связи, которое к тому же меньше оптимального значения этой величины в случае одного накопителя. Однако при этом возникает необходимость увеличения полосы пропускания в 2,56 раза.

Используя полученные выше результаты и результаты любой работы по когерентному обнаружению одиночного сигнала, легко определить пороговые сигналы при когерентном накоплении при помощи устройств с задержанной обратной связью.

Отношение сигнал/шум на выходе систем накопления можно еще увеличить в несколько раз, если перед накопителями с задержанной обратной связью поставить узкополосный фильтр, однако этот вопрос выходит за рамки данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. D. White, A. E. Ruvin, Recent advances in the synthesis of comb filters, Convent. Record I. R. E., 1957, 5, pt 2, 186.
2. Ю. С. Лезин, Накопление шума в устройствах с задержанной обратной связью, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 2,187.
3. Л. А. Моругин, Накопление импульсных сигналов в устройствах с задержанной обратной связью, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 12, 1885.
4. Ю. С. Лезин, О прохождении сигнала и шума через оптимальный фильтр, Тр. Горьковского политехнического института им. А. А. Жданова, 1958, 14, 5, 45.

Поступила в редакцию
28 III 1960
После переработки
30 IX 1960

1961 № 4

РАДИОДАЛЬНОМЕР С ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ШУМОВ И ПРИ ФЛУКТУАЦИЯХ ОТРАЖЕННОГО СИГНАЛА

Г. П. Тартаковский

Выведены формулы для систематической и флуктуационной ошибок радиодальномера с частотной модуляцией, имеющих место при наличии шумов приемника и флуктуаций отраженного сигнала. Обсуждаются зависимости этих ошибок от различных параметров и делаются некоторые рекомендации.

ВВЕДЕНИЕ

В радиолокаторах непрерывного излучения и в самолетных высотомерах часто применяется дальномер с частотной модуляцией (рис. 1).

Передатчик излучает частотно-модулированные колебания, которые используются также в качестве опорных колебаний смесителя. На вход последнего поступают задержанные отраженные колебания. В результате на выходе фильтра, обладающего полосой прозрачности в области низких частот, появляются колебания, число нулей которых тем больше, чем больше задержка отраженных колебаний, т. е. измеряемая дальность. Число нулей за время измерения T измеряет счетчик, который может состоять, например, из блокинг-генератора в пусковом режиме и счетчика импульсов. Процессы в дальномере описываемого вида проанализированы в работе [1], где, в частности, показана неправомерность упрощенной трактовки, в соответствии с которой дальномер измеряет частоту колебания на выходе фильтра. В этой работе принятые колебания рассматривались как детерминированный процесс, отличающийся от излученных колебаний только задержкой.

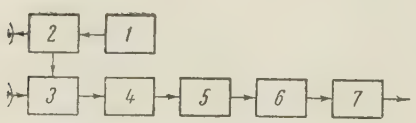


Рис. 1. Блок-схема дальномера с частотной модуляцией:

1 — модулятор; *2* — передатчик; *3* — смеситель; *4* — усилитель и фильтр; *5* — ограничитель; *6* — счетчик импульсов; *7* — усилитель постоянного тока

В действительности, однако, отраженные колебания всегда являются случайными за счет неизбежных флуктуаций. Опыт показывает, что неучет флуктуаций, в особенности в условиях движущихся объектов, приводит к существенным ошибкам в оценке точности измерительных устройств. Кроме того, прием радиолокационного сигнала всегда производится при наличии шумов приемного устройства, которые приводят к дополнительным ошибкам.

В данной работе исследуются ошибки радиодальномера с частотной модуляцией при наличии шумов и флуктуаций отраженного сигнала.

1. ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ ПРОЦЕССА НА ВЫХОДЕ ФИЛЬТРА ДАЛЬНОМЕРА

Зондирующий сигнал можно представить в виде

$$U(t) = u_0 \cos[\omega_0 t + \psi(t)], \qquad (1)$$

где $\psi(t)$ — фаза частотно-модулированного колебания. В дальнейшем при

нализе мы предположим для конкретности, что

$$\psi(t) = \frac{\Delta\omega}{\Omega_м} \sin \Omega_м t, \tag{2}$$

де $\Delta\omega$ — девиация частоты, $\Omega_м$ — частота модуляции.

Обычно отражающий объект можно представить в виде большого числа независимых элементарных отражателей, медленно случайно перемещающихся. В результате отраженный сигнал представляет собой нормальный случайный процесс, узкополосный по отношению к ω_0.

Можно показать, что при симметричной относительно ω_0 спектральной плотности флуктуаций * и при зондирующем сигнале (1) функция корреляции отраженного сигнала

$$R_{вхс}(t, \tau) = u^2 \cos [\omega_0 \tau + \psi(t - \tau_0) - \psi(t - \tau - \tau_0)] \rho(\tau), \tag{3}$$

де $\rho(\tau)$ — огибающая коэффициента корреляции флуктуаций при зондирующем сигнале в виде $\sin \omega_0 t$, τ_0 — время задержки отраженного сигнала.

В приемнике обработке подвергается аддитивная смесь сигнала с шумом $x(t)$, функция корреляции которой

$$R_x(t, \tau) = R_{вхс}(t, \tau) + R_{вхш}(\tau) = \\ = u^2 \cos [\omega_0 \tau + \psi(t - \tau_0) - \psi(t - \tau - \tau_0)] \rho(\tau) + N_0 \delta(\tau). \tag{4}$$

Предположено, что шум приемника можно считать белым со спектральной плотностью (двусторонней) N_0, $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

В смесителе образуется произведение

$$y(t) = x(t) U(t). \tag{5}$$

Функция корреляции процесса $y(t)$ находится как

$$R_y(t, \tau) = R_{cy}(t, \tau) + R_{шy}(t, \tau). \tag{6}$$

В выражении (6)

$$R_{cy}(t, \tau) = u^2 \cos [\omega_0 \tau + \psi(t - \tau_0) - \psi(t - \tau - \tau_0)] \rho(\tau) u_0^2 \cos [\omega_0 t + \\ + \psi(t)] \cos [\omega_0 (t - \tau) + \psi(t - \tau)], \tag{7}$$

$$R_{шy}(t, \tau) = N_0 \delta(\tau) u_0^2 \cos [\omega_0 t + \psi(t)] \cos [\omega_0 (t - \tau) + \psi(t - \tau)] = K N_0 \delta(\tau). \tag{8}$$

В дальнейшем нас не будут интересовать высокочастотные составляющие колебаний, ибо они не пройдут через фильтр дальномера, поэтому отбросим в выражении (7) члены, соответствующие этим составляющим, и будем интересоваться функцией корреляции

$$R^0_{cy}(t, \tau) = K P_c \rho(\tau) \cos \left[B(\tau) \sin \Omega_м \left(t - \frac{\tau + \tau_0}{2} \right) \right]. \tag{9}$$

В формулы (8) и (9) введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{u_0^2}{2}, \\ P_c &= \frac{u^2}{2}, \\ B(\tau) &= 4 \frac{\Delta\omega}{\Omega_м} \sin \Omega_м \frac{\tau_0}{2} \sin \Omega_м \frac{\tau}{2} \cong 2 \Delta\omega \tau_0 \sin \Omega_м \frac{\tau}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

* Подразумеваются флуктуации отраженного сигнала при зондирующем сигнале в виде синусоиды частоты ω_0.

$P_с$ представляет собой среднюю мощность принятого сигнала, K — коэффициент преобразования, в который можно включить коэффициенты усиления последующих звеньев.

Случайный сигнал с функцией корреляции (6) проходит через фильтр. Будем считать, что это идеальный фильтр с частотной характеристикой рис. 2. При $\Delta\omega\tau_0 \gg 1$ основные спектральные составляющие случайного сигнала с функцией корреляции (9) расположены в области полосы прозрачности фильтра и поэтому с достаточной точностью «сигнальная» составляющая функции корреляции процесса на выходе фильтра

$$R_с(t, \tau) = R^0_{сy}(t, \tau). \tag{11}$$

«Шумовая» составляющая функции корреляции находится как

$$R_ш(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} KN_0 |H_Ф(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \tag{12}$$

и после вычислений функция корреляции процесса на выходе фильтра

$$R_{сш}(t, \tau) = R_с(t, \tau) + R_ш(\tau) =$$

$$= KP_с\rho(\tau)\cos\left[B_в(\tau)\sin\Omega_М\left(t - \frac{\tau+\tau_0}{2}\right)\right] +$$

$$+ KP_ш\left(\frac{\sin\omega_{Ф1}\tau}{\Delta\omega_Ф\tau} - \frac{\sin\omega_{Ф0}\tau}{\Delta\omega_Ф\tau}\right), \tag{13}$$

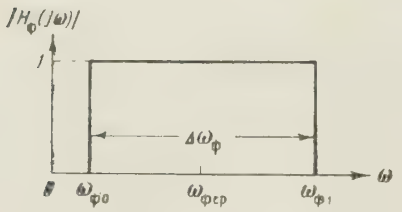


Рис. 2. Частотная характеристика фильтра

где

$$P_ш = 2\Delta f_Ф N_0 \tag{14}$$

имеет смысл средней мощности шума в полосе фильтра. Итак, найдена функция корреляции случайного процесса на выходе фильтра, счет нулей которого определяет выходную величину дальномера.

2. СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА ДАЛЬНОМЕРА

Для расчета систематической ошибки, имеющей место при воздействии шумов и флуктуаций сигнала, нужно найти среднее за время T $\left(T \gg \frac{2\pi}{\Omega_М}\right)$ число нулей процесса на выходе фильтра дальномера при условии положительной производной процесса в нулях.

Функция корреляции исследуемого процесса определяется выражением (13). Дисперсия этого процесса

$$\sigma^2 = R_{сш}(t, 0) = K(P_с + P_ш) \tag{15}$$

от текущего времени t не зависит.

Коэффициент корреляции

$$r_{сш}(t, \tau) = \frac{R_{сш}(t, \tau)}{\sigma^2} = \frac{P_с}{P_с + P_ш}\rho(\tau)\cos\left[B(\tau)\sin\Omega_М\left(t - \frac{\tau+\tau_0}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{P_ш}{P_с + P_ш}\left(\frac{\sin\omega_{Ф1}\tau}{\Delta\omega_Ф\tau} - \frac{\sin\omega_{Ф0}\tau}{\Delta\omega_Ф\tau}\right). \tag{16}$$

Легко показать, что на случай нестационарного случайного процесса с независящей от времени дисперсией можно распространить способ расчета среднего числа нулей, изложенный, например, Б. Р. Левиным [2], применительно к стационарному случайному процессу. В результате

Среднее в единицу времени число нулей при усреднении системой за время T находится как

$$n_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T}\frac{\omega_{\text{I}}(t)}{2\pi}\,dt \tag{17}$$

где $\omega_{\text{I}}(t)$ определяется при помощи

$$\omega_{\text{I}}^2(t) = -r''(t, 0), \tag{18}$$

где $r(t, \tau)$ — коэффициент корреляции исследуемого процесса,

$$r''(t, 0) = \frac{d^2r(t, \tau)}{d\tau^2}\Big|_{\tau=0}. \tag{19}$$

В случае нестационарного процесса ω_{I} — функция времени.

Рассчитывая $\omega_{\text{I}}^2(t)$, имеем

$$\omega_{\text{I}}^2(t) = -r''_{\text{сш}}(t, 0) = \frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{с}}+P_{\text{ш}}}\left[-\rho''(0) + (\Delta\omega\Omega_{\text{м}}\tau_0)^2\sin^2\Omega_{\text{м}}\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right)\right] + \frac{P_{\text{ш}}}{P_{\text{с}}+P_{\text{ш}}}\left(\omega_{\text{фср}}^2+\frac{\Delta\omega_{\text{ф}}^2}{12}\right), \tag{20}$$

где

$$\omega_{\text{фср}} = \omega_{\text{ф0}} + \frac{\Delta\omega_{\text{ф}}}{2} = \omega_{\text{ф1}} - \frac{\Delta\omega_{\text{ф}}}{2}, \quad \rho''(0) = \frac{d^2\rho(\tau)}{d\tau^2}\Big|_{\tau=0}. \tag{21}$$

Если обозначить

$$\alpha = P_{\text{с}}\left[-\rho''(0) + \frac{(\Delta\omega\Omega_{\text{м}}\tau_0)^2}{2}\right] + P_{\text{ш}}\left(\omega_{\text{фср}}^2+\frac{\Delta\omega_{\text{ф}}^2}{12}\right), \quad \beta = P_{\text{с}}\frac{(\Delta\omega\Omega_{\text{м}}\tau_0)^2}{2}, \tag{22}$$

то в результате вычислений по формуле (17)

$$n_{\text{ср}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{P_{\text{с}}+P_{\text{ш}}}}\left(1-\frac{1}{16}\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\frac{5}{1024}\frac{\beta^4}{\alpha^4}-\cdots\right). \tag{23}$$

Полученный ряд при $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ хорошо сходится. Вместе с тем $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ по сути введенных обозначений. Поэтому с достаточной точностью

$$n_{\text{ср}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi\sqrt{P_{\text{с}}+P_{\text{ш}}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{с}}+P_{\text{ш}}}\left[-\rho''(0)+\frac{(\Delta\omega\Omega_{\text{м}}\tau_0)^2}{2}\right]+\frac{P_{\text{ш}}}{P_{\text{с}}+P_{\text{ш}}}\left(\omega_{\text{фср}}^2+\frac{\Delta\omega_{\text{ф}}^2}{12}\right)}. \tag{24}$$

При отсутствии шумов приемника $P_{\text{ш}} = 0$, а при отсутствии флуктуаций $\rho''(0) = 0$. Поэтому в случае детермпнированного процесса на входе приемника

$$n_{\text{ср0}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta\omega\Omega_{\text{м}}}{\sqrt{2}}\tau_0, \tag{25}$$

и выходная величина дальномера действительно пропорциональна измеряемой задержке сигнала τ_0 с коэффициентом пропорциональности

$$k_\tau = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta\omega\Omega_{\text{м}}}{\sqrt{2}}. \tag{26}$$

Среднее значение измеренной при наличии шумов и флуктуаций за-

держки (27)

$$\tau_{и} = \frac{n_{ср}}{k_{\tau}} = \sqrt{\frac{P_{с}}{P_{с}+P_{ш}}\left[\frac{-2\rho''(0)}{(\Delta\omega\Omega_{м})^{2}}+\tau_{0}^{2}\right]+\frac{P_{ш}}{P_{с}+P_{ш}}\frac{2}{(\Delta\omega\Omega_{м})^{2}}\left(\omega_{фср}^{2}+\frac{\Delta\omega_{ф}^{2}}{12}\right)},$$

а среднее значение измеренной дальности

$$D_{и} = \frac{c\tau_{и}}{2}, \tag{28}$$

где c — скорость света.

Относительная систематическая ошибка измерения дальности выражается формулой

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta\tau_{0}}{\tau_{0}} = \tag{29}$$

$$= \sqrt{\frac{P_{с}}{P_{с}+P_{ш}}\left[\frac{c^{2}\Delta\omega_{фл}^{2}}{2(\Delta\omega\Omega_{м}D)^{2}}+1\right]+\frac{P_{ш}}{P_{с}+P_{ш}}\frac{c^{2}}{2(\Delta\omega\Omega_{м}D)^{2}}\left(\omega_{фср}^{2}+\frac{\Delta\omega_{ф}^{2}}{12}\right)}-1$$

и получается различной при разных дальностях.

В выражении (29) через $\Delta\omega_{фл}$ обозначена величина $\sqrt{-\rho''(0)}$, совпадающая с полосой (среднеквадратичной) флуктуацией отраженного сигнала. С достаточной для практики точностью под $\Delta\omega_{фл}$ можно понимать любым способом определенную полосу флуктуаций.

3. ФЛУКТУАЦИОННАЯ ОШИБКА ДАЛЬНОМЕРА

Помимо систематической ошибки шумы и флуктуации сигнала вызывают флуктуационную ошибку, которую можно количественно охарактеризовать дисперсией выходной величины дальномера. Для строгого вычисления этой дисперсии нужно было бы распространить на случай нестационарного случайного процесса расчет функции корреляции и спектральной плотности производной от фазы случайного процесса. Можно показать, что в случае независящей от времени дисперсии исследуемого процесса оказываются справедливыми формулы В. И. Бунимовича [3], полученные для стационарного процесса, только искомая спектральная плотность зависит от времени как от параметра в силу нестационарности процесса.

Нужно, однако, заметить, что указанный путь вычислений требует конкретизации вида функции корреляции флуктуаций и приводит к громоздким результатам. Поэтому мы ограничимся приближенной оценкой дисперсии ошибки. Эту оценку получим, исходя из следующих соображений.

Коэффициент корреляции процесса на выходе фильтра (16) можно переписать в виде

$$r_{сш}(t,\ \tau) = \lambda(t,\ \tau)\cos\omega_{ср}\tau + \chi(t,\ \tau)\sin\omega_{ср}\tau, \tag{30}$$

где

$$\lambda(t,\ \tau) = \frac{P_{с}}{P_{с}+P_{ш}}\rho(\tau)\cos[b(t,\ \tau)] +$$

$$+\frac{P_{ш}}{P_{с}+P_{ш}}\frac{\sin(\omega_{ф1}-\omega_{ср})\tau-\sin(\omega_{ф0}-\omega_{ср})\tau}{\Delta\omega_{ф}\tau}, \tag{31}$$

$$\chi(t,\ \tau) = -\frac{P_{с}}{P_{с}+P_{ш}}\rho(\tau)\sin[b(t,\ \tau)] +$$

$$+\frac{P_{ш}}{P_{с}+P_{ш}}\frac{\cos(\omega_{ф1}-\omega_{ср})\tau-\cos(\omega_{ф0}-\omega_{ср})\tau}{\Delta\omega_{ф}\tau}, \tag{32}$$

$$b(t, \tau) = B(\tau) \sin \Omega_M \left(t - \frac{\tau + \tau_0}{2}\right) - \omega_{ср}\tau. \quad (33)$$

В последних выражениях $\omega_{ср}$ — некоторая средняя частота случайного процесса на выходе фильтра.

Распространяя на случай нестационарного нормального случайного процесса с независящей от времени дисперсией способ расчета одномерного закона распределения для производной от фазы процесса, приведенный в работе [4], получим

$$W(\dot{\Theta}) = \frac{\delta\omega^2(t)}{2\{[\omega_{ср} - \omega_I(t) - \dot{\Theta}]^2 + \delta\omega^2(t)\}^{3/2}}, \quad (34)$$

где

$$\delta\omega^2(t) = \omega_I^2(t) - \omega_{II}^2(t), \quad (35)$$

$$\omega_I^2(t) = -r''_{сш}(0), \quad (36)$$

$$\omega_{II}(t) = \lambda(t, 0)\,\omega_{ср} - \chi'(t, 0). \quad (37)$$

Подставляя в формулу (35) полученные выше выражения функций, имеем

$$\delta\omega^2(t) = \frac{P_c}{P_c + P_ш}|\rho''(0)| + \frac{P_c P_ш}{(P_c + P_ш)^2}(\Delta\omega\Omega_M\tau_0)^2 \sin^2 \Omega_M\left(t - \frac{\tau_0}{2}\right) -$$

$$- \frac{2P_c P_ш}{(P_c + P_ш)^2}\Delta\omega\Omega_M\tau_0\omega_{фср} \sin \Omega_M\left(t - \frac{\tau_0}{2}\right) +$$

$$+ \frac{P_ш P_c}{(P_c + P_ш)^2}\omega_{фср}^2 + \frac{P_ш}{P_c + P_ш}\frac{\Delta\omega_ф^2}{12}. \quad (38)$$

Составляя дисперсию, соответствующую плотности вероятности (34), и усредняя ее во времени (в силу усредняющих свойств последующих элементов схемы), мы получили бы данные для расчета дисперсии выходной величины дальномера. Однако дисперсия, соответствующая выражению (34), обращается в ∞. Поэтому ширину кривой плотности вероятности целесообразно оценить, следуя Б. Р. Левину [2], величиной

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{\delta\omega^2(t)}{2[x^2 + \delta\omega^2(t)]^{3/2}}\,dx = \delta\omega(t). \quad (39)$$

Можно усмотреть, что спектральная плотность процесса счета нулей в области низких частот приближенно равна

$$S_0 = k\frac{\overline{\delta\omega(t)}}{2\pi}, \quad (40)$$

где черта сверху означает усреднение во времени, а k — коэффициент порядка единицы. Полагая $k = 1$ и заменяя приближенно $\overline{\delta\omega(t)} = \sqrt{\overline{\delta\omega^2(t)}}$, получим

$$\sigma^2_{вых} \cong \frac{1}{2\pi T}\sqrt{\frac{P_c}{P_c + P_ш}|\rho''(0)| + \frac{P_c P_ш}{(P_c + P_ш)^2}\left[\frac{(\Delta\omega\Omega_M\tau_0)^2}{2} + \omega_{фср}^2\right] + \frac{P_ш}{P_c + P_ш}\frac{\Delta\omega_ф^2}{12}} \quad (41)$$

и дисперсия измерения дальности может быть приближенно оценена

формулой

$$\sigma_D^2 \cong \frac{\pi c^2}{T(\Delta\omega\Omega_M)^2}\sqrt{\frac{P_c}{P_c+P_ш}\Delta\omega_{фл}^2+\frac{P_cP_ш}{(P_c+P_ш)^2}\left[2\left(\frac{\Delta\omega\Omega_M D}{c}\right)^2+\omega_{фср}^2\right]}\cdots\rightarrow\sqrt{\cdots+\frac{P_ш}{P_c+P_ш}\frac{\Delta\omega_ф^2}{12}}. \quad (42)$$

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные для систематической и флуктуационной ошибок формулы удобно представить в виде

$$\frac{\Delta D}{D}=\sqrt{\frac{\varkappa\frac{\Delta\omega_{фл}^2}{d^2}+1+0{,}27\varepsilon d^2}{1+\varepsilon d^4}}-1 \quad (43)$$

$$\sigma_D^2=\frac{2\pi}{T}\varkappa D_m^2\sqrt{\frac{\Delta\omega_{фл}^2}{1+\varepsilon d^4}+\frac{\varepsilon d^4}{(1+\varepsilon d^4)^2}\frac{d^2+\frac{2}{\pi^2}}{\varkappa}\frac{\varepsilon d^4}{1+\varepsilon d^4}\frac{2}{3\pi^2}\frac{1}{\varkappa}}, \quad (44)$$

где введены обозначения: D_m — максимальная дальность действия;

$$d=\frac{D}{D_m};$$

$$\varkappa=\frac{v^2}{2\pi^2\Delta\omega^2};$$

$$v=\frac{2\pi}{\Omega_M\tau_{0m}}$$

— отношение периода модуляции к максимальной задержке сигнала,

$$\varepsilon=\frac{P_{ш0}}{P_c}$$

— отношение шум/сигнал на максимальной дальности.

При получении выражений (43) и (44) предположено, что $\omega_{ф1}\gg\omega_{ф0}$ и поэтому $\Delta\omega_ф\approx\omega_{ф1}\approx2\omega_{фср}$. Кроме того, учтено, что минимальная величина $\Delta\omega_ф$ должна определяться из условия пропускания частот, соответствующих максимальной дальности, откуда

$$\Delta\omega_ф\cong\frac{4\Delta\omega}{v}.$$

Из формулы (43) видно, что при малых дальностях ($d\ll1$) среднее значение измеренной дальности будет больше истинного. Однако при выборе достаточно высокой девиации частоты $\Delta\omega$ и частоты модуляции Ω_M имеет место неравенство

$$\varkappa\frac{\Delta\omega_{фл}^2}{d^2}\ll1 \quad (45)$$

даже при малых дальностях. Поэтому систематическая ошибка на малых дальностях не велика. При больших дальностях среднее значение измеренной дальности будет меньше истинного и на максимальной дальности может приближенно определяться формулой

$$\frac{\Delta D}{D_m}\cong\sqrt{\frac{1+0{,}27\varepsilon}{1+\varepsilon}}-1.$$

Если предположить, что на максимальной дальности шум значительно больше сигнала ($\varepsilon \gg 1$), то по формуле (46) $\frac{\Delta D}{D_m} = -0{,}48$, что недопустимо. При $\varepsilon = 1$ $\frac{\Delta D}{D_ш} = -0{,}2$, т. е. измеренная дальность на 20% меньше истинной. Задаваясь допустимой погрешностью измерения среднего значения дальности $\frac{\Delta D}{D_ш} = -\mu$, имеем

$$\varepsilon = \frac{1-(1-\mu)^2}{(1-\mu)^2 - 0{,}27}. \qquad (47)$$

Если, например, задаться $\mu = 0{,}05$, то $\varepsilon = 0{,}159$. Таким образом, находим допустимое значение сигнал/шум, по которому можно определить необходимые мощность передатчика и чувствительность приемника.

Из выражения (45) видно, что при $\varepsilon < 1$ флуктуационная ошибка максимальна на максимальной дальности D_m и может рассчитываться по формуле

$$\sigma^2_{D\,\text{макс}} = \frac{2\pi}{T}\varkappa D_m^2 \sqrt{\frac{\Delta\omega^2_{\text{фл}}}{1+\varepsilon} + \frac{1}{\varkappa}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(\frac{1{,}2}{1+\varepsilon} + 6{,}75\cdot 10^{-2}\right)}. \qquad (48)$$

При соблюдении часто удовлетворяющегося условия $\Delta\omega^2_{\text{фл}}\varkappa \ll 1$ и $\varepsilon < 1$ справедлива приближенная формула

$$\sigma^2_{D\,\text{макс}} \cong \frac{\sqrt{2{,}4\nu}D_m^2}{T\Delta\omega}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}. \qquad (49)$$

На рис. 3 приведен график

$$\sigma_0^2 = \frac{\sigma^2_{D\,\text{макс}}}{\frac{\sqrt{2{,}4\nu}D_m^2}{T\Delta\omega}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon},$$

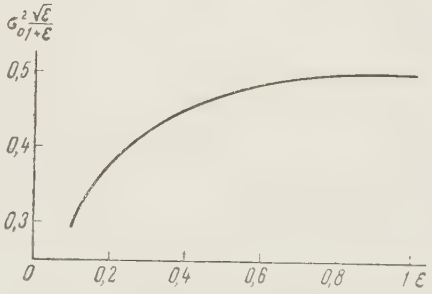


Рис. 3. Зависимость максимальной дисперсии ошибки дальномера от отношения шум/сигнал на максимальной дальности ε

пользуясь которым, можно находить допустимые значения отношения сигнал/шум по заданной дисперсии выходной величины дальномера.

Легко видеть, что для уменьшения флуктуационной ошибки желательно увеличивать девиацию частоты $\Delta\omega$, время усреднения T, частоту модуляции $\Omega_м$ (уменьшать ν), а также, разумеется, увеличивать отношение сигнал/шум (уменьшать ε).

Если, например, выбрать $\Delta f = 50$ *Мгц*, $T = 0{,}2$ *сек* и $\nu = 10$, то для $D_m = 10$ *км*

$$\sigma^2_{D\,\text{макс}} = 13{,}1\ м^2\ (\varepsilon = 1),$$

$$\sigma^2_{D\,\text{макс}} = 8{,}7\ м^2\ (\varepsilon = 0{,}159).$$

При этом нетрудно убедиться, что для $\Delta f_{\text{фл}}$ порядка десятков герц условия применимости последней формулы удовлетворяются.

Таким образом, при обычных соотношениях параметров ошибки подобных дальномеров получаются небольшими. Вместе с тем, следует отметить, что рассмотренная схема дальномера весьма далека от оптималь-

ной. Ее можно приблизить к оптимальной, если сделать весьма узкополос ный фильтр, перестраиваемый в соответствии с измеряемой дальностью Разумеется, это имеет смысл только для систем, обладающих повышенны ми точностями, либо работающих при малых отношениях сигнал/шум

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность В. Г Репину за ряд ценных замечаний, высказанных в связи с данной работой

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Маланов, К теории радиодальномера с частотной модуляцией, Радио техника, 1959, 14, 4, 46.
2. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике Изд. Советское радио, 1957.
3. В. И. Бунимович, Флюктуационные процессы в радиоприемных устройст вах, Изд. Советское радио, 1951.

Поступила в редакцию
28 I 1960

1961 № 4

О БОКОВОМ ИЗЛУЧЕНИИ ЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН

Б. Е. Кинбер

Изложен метод расчета бокового излучения зеркальных антенн, который основан на применении асимптотических решений задач дифракции. Показано, что прежние работы по теории зеркальных антенн не учитывали ряда существенных явлений и поэтому в некоторых случаях давали неверные решения. Приведены графики огибающих бокового излучения цилиндрических и осесимметричных антенн.

ВВЕДЕНИЕ

Расчет излучения зеркальных антенн производится в настоящее время апертурным и токовым методами. Для этих расчетов надо знать или распределение поля в раскрыве, или распределение тока по зеркалу. Точность расчета поля излучения, если не рассматривать технических трудностей расчета, определяется точностью задания исходных распределений.

Однако и распределение тока по поверхности, и распределение поля в раскрыве задаются обычно в приближении Кирхгофа (иногда с некоторыми уточнениями), не вытекают из строгих решений и, следовательно, ограничивают точность расчета.

Особенно неприятно то обстоятельство, что неизвестны как фактическая точность исходного приближения, так и границы его применимости, а также поправки, необходимые для расчета в более высоком приближении.

Вместе с тем, сложный математический аппарат, применяемый при расчете по апертурному и токовому методам, создает ложное впечатление строгости, в связи с чем результаты расчета часто распространяются на область параметров, где неприменимы исходные аппроксимации.

В настоящей работе рассмотрен метод расчета бокового излучения зеркал, основанный на применении асимптотических решений дифракционных задач.

Боковое излучение зеркальной антенны определяется в виде суммы «лучей», удовлетворяющих принципу Ферма, что является известным обобщением метода Келлера, который ввел понятие дифракционных лучей, отрывающихся от кромок [1] и огибающих тело [2]. В случае зеркала конечного размера наряду с лучами Келлера имеются лучи более сложных видов, соответствующих комбинациям из многократных отражений по вогнутой части зеркала, дифракций на краях, огибаний по тыльной стороне зеркала и т. д.

Каждый луч соответствует полю, распространяющемуся вдоль луча; амплитуда поля является медленно меняющейся функцией точек излучения и наблюдения и формы тела. Вследствие интерференции лучей результирующее поле имеет осциллирующий характер.

В § 1 определены возможные виды лучей; далее рассмотрены амплитуды полей, соответствующих лучам различных видов. При расчете диаграммы с точностью до $(kD)^{-3/2}$ достаточно учитывать только лучи, зависимость амплитуды которых от длины волны не выше $\lambda^{1/2}$. Это ограничивает число лучей, которое надо учесть при расчете. С этой степенью точности рассчитывается огибающая характеристики бокового излучения зеркальных антенн.

Понятно, что в настоящей работе поставленная задача далеко не исчерпана и необходим ряд дальнейших уточнений. Однако уже полученное решение по точности превосходит решение по токовому и апертурному методам.

К числу преимуществ полученного решения относится также физическая наглядность и простота расчетов.

В частности, из данной работы следует, что влияние края зеркала (острой кромки) на распределение токов по его поверхности, в отличие от обычных представлений, не локализовано вблизи края, а распространяется на всю поверхность зеркала. Величина поправок к току $2[\vec{n}\vec{H}_0]$ соизмерима, а в некоторых случаях и превосходит этот ток.

1. ДИФРАКЦИОННЫЕ ЛУЧИ И ИХ АМПЛИТУДЫ

Рассмотрим все возможные виды экстремальных путей между источником O и точкой наблюдения P.

Помимо прямого пути между ними ($O - P$), возможны экстремальные пути при дополнительных условиях: экстремальный путь должен один или несколько раз соприкоснуться с дифрагирующим телом (точки R), острыми кромками или остриями тела (точки H), обогнуть тело (по дуге $s - s$) (см. рис. 1, 2). Мы будем рассматривать лишь такие экстремальные пути, которые не проходят сквозь тело (точки T на рис. 1, 2). В общем случае экстремальный путь состоит из последовательности нескольких отражений R, касаний с кромками H и огибаний тела $s - s$.

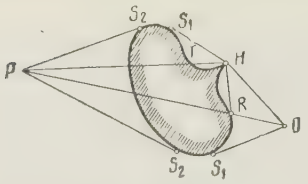


Рис. 1. Экстремальные пути между источником O и точкой наблюдения P

Будем характеризовать каждый экстремальный путь последовательностью точек R, H, s. Так, например, луч, отраженный от зеркала, характеризуется последовательностью $O - R - P$; луч, соответствующий дифракции на одной кромке,— последовательностью $O - H - P$. Экстремальность длины луча обеспечивается тем, что: а) в точках R справедлив закон зеркального отражения; б) в точках H угол между кромкой и падающим лучом равен углу между кромкой и дифрагированным лучом; в) заострение тела всегда является точкой экстремального пути; г) огибание тела $s - s$ происходит по геодезическим линиям. Падающий и отрывающийся лучи касательны к телу и дуге $s - s$.

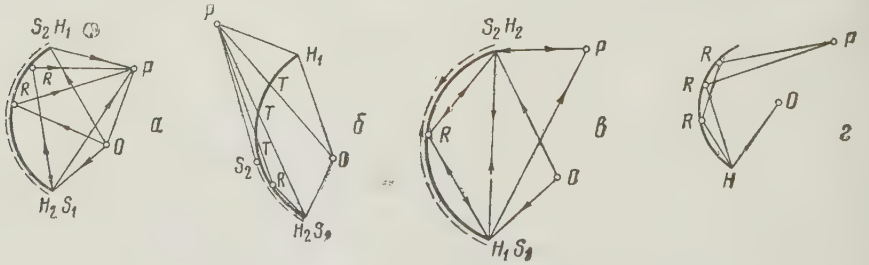


Рис. 2. Экстремальные пути при дифракции на зеркале:

$а - O - P$, $O - R - P$, $O - H_1 - P$, $O - H_2 - P$, $O - H_2S_1 - S_2H_1 - P$, $O - H_2 - R - P$; $б - O - P$, $O - T - P$, $O - H_1 - P$, $O - H_2S_1 - S_2 - P$, $O - H_2 - T - P$, $O - H_2 - R - T - P$; $в - O - H_2 - H_1S_1 - H_2S_2 - H_1 - P$, $O - H_1 - H_2S_2 - H_1S_1 - P$, $O - H_1S_1 - H_2S_2 - P$, $O - H_2 - H_1 - P$, $O - H_1 - H_2 - P$, $O - H_1 - R - H_2 - P$ и т. д.; $г - O - H - R - P$, $O - H - R - R - P$

Число экстремальных путей зависит от формы тела, положения источника и точки наблюдения. Для тел бесконечных размеров число экстремальных путей может оказаться конечным.

Таблица 1

№ сектора	Граница секторов	Типы экстремальных путей	Примечание
1	$(O, (kD)^{-1})$	$O-P$ $O-R-P$ $O-H_1-H_2-P$ $O-H_2-H_1-P$ и т. д.	главный лепесток
2	$\left((kD)^{-1}, \frac{\pi}{2}-\psi_{кр}\right)$	$O-P$ $O-H_1-P$ $O-H_2-P$ $O-H_1-H_2-P$ $O-H_2-H_1-P$ и т. д.	сектор обычных боковых лепестков, интерференция краевых волн и поле облучателя
3	$\left(\frac{\pi}{2}-\psi_{кр}, \frac{\pi}{2}-\frac{\psi_{кр}}{2}\right)$	$O-P$ $O-H_1-P$ $O-H_2-P$ $O-H_2-R-P$ $O-H_2-R-R-P$ и т. д.	боковые лепестки образуются за счет интерференции краевых волн и волн, отраженных от поверхности зеркала
4	$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\psi_{кр}}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$O-P$ $O-H_1-P$ $O-H_2-P$ $O-H_2-R-P$ и т. д.	часть отраженных краевых лучей затенена
5	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi-\psi_{кр}\right)$ или $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\frac{\psi_{кр}}{2}\right)$	$O-P$ $O-H_1-P$	волна от дальнего края зеркала затенена
6	$\left(\pi-\psi_{кр}, \frac{\pi}{2}+\frac{\psi_{кр}}{2}\right)$ или $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\psi_{кр}}{2}, \pi-\psi_{кр}\right)$	$O-H_1-P$ или $O-P$ $O-H_1-P$ $O-H_2-P$	затенены первичный облучатель и дальний край зеркала
7а	$(\pi-\psi_{кр} \mp (kD)^{-1})$	—	сектор краевого лепестка облучателя
7б	$\left(\frac{\pi}{2} \mp (kD)^{-1}\right)$	—	сектор краевого лепестка дальнего края зеркала
8	$\left(\frac{\pi}{2}-\psi_{кр}, \pi-(kD)^{-1}\right)$ или $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\psi_{кр}}{2}, \pi-(kD)^{-1}\right)$	$O-H_1-P$ $O-H_2-P$	затенен облучатель
9	$(\pi-(kD)^{-1}, \pi)$	$O-H_1-P$ $O-H_2-P$	краевая волна синфазна; сектор заднего лепестка

Так, например, если источник расположен в фокусе параболоида, то экстремальных путей всего два ($O-P$ и $O-R-P$). Для тел ограниченных размеров количество экстремальных путей всегда бесконечно. В самом деле, к любому пути, огибающему тело, всегда можно добавить экстремальный путь, состоящий из любого количества оборотов вокруг тела.

Рассмотрим теперь амплитуды лучей разных видов. Изменение амплитуды вдоль луча происходит между точками «контактов» с телом и в точ-

Таблица 2

№ сектора	$2\Psi_{кр}^{\circ}$				
	60	90	120	150	180
2	0—60	0—45	0—30	0—15	0
3	60—75	45—67,5	30—60	15—52,5	0—45
4	75—90	67,5—90	60—90	52,5—90	45—90
5	90—105	90—112,5	90—120	90—105	90
7	105—150*	112,5—135*	—	105—127,5**	90—135**
8	150—180	135—180	120—180	127,5—135	135—180

* Затенения нет.
** Затенены облучатель и дальний край.

ках (линиях) контактов с телом. В первом приближении, за исключением особых случаев, изменение амплитуды вдоль участков лучей между контактами с телом подчиняется законам геометрической оптики. Поскольку поток энергии в лучевой трубке сохраняется, то амплитуда пропорциональна $s^{-1/2}$, где s — площадь сечения трубки, и не зависит от длины волны.

Изменение амплитуды в точках контактов с телом происходит (в первом приближении) следующим образом.

а) В точках отражения меняется телесный угол лучевой трубки. Коэффициент расширения или сжатия определяется геометрией отражения и не зависит от длины волны.

б) В точках H лучевая трубка ширины порядка λ в направлении поперек кромки (ширина последней зоны Френеля) превращается в цилиндрическую или тороидальную волну. На остриях лучевая трубка площади порядка λ^2 трансформируется в сферическую волну. Следовательно, в точках H на кромках коэффициент трансформации по амплитуде пропорционален $\lambda^{1/2}$, а на остриях — λ.

в) По линии огибания тела $s - s$ (по выпуклой стороне тела) происходит экспоненциальное затухание амплитуды. Показатель экспоненты пропорционален дуге $s - s$.

Приведенных соображений достаточно для того, чтобы отобрать экстремальные пути, дающие вклад с заданной величиной малости.

Обычный расчет бокового излучения в лучшем случае соответствует учету однократных дифракций на кромках ($O - H - P$), т. е. учету членов порядка $\lambda^{1/2}$ (или $(kD)^{-3/2}$ для нормированной диаграммы). Если сохранить такую точность, но более последовательно учесть все явления дифракции, то достаточно учесть все пути, содержащие однократные дифракции на кромках.

Каждая последующая дифракция на кромке понижает порядок амплитуды на $\lambda^{1/2}$. Можно также пренебречь лучами, огибающими зеркало тем более, что тыльная сторона зеркала занята конструктивными элементами, обеспечивающими жесткость антенны.

Таким образом, при выбранной точности расчета ($(kD)^{-3/2}$) достаточно учесть лучи вида: $O - P$ (поле первичного облучателя); $O - H - P$ (поле дифракции на краю зеркала); $O - H - R - P$; $O - H - R - \ldots - R - P$ (отражение краевых волн от вогнутой стороны зеркала).

При расчете, в отличие от токового метода, автоматически учитывается условие затенения [3], так как выбираются лишь те экстремальные пути, которые не пересекают самого зеркала.

В табл. 1 приведено разбиение диаграммы осесимметричного параболического зеркала на секторы по видам экстремальных путей, а в табл. 2 приведены углы в градусах, определяющие границы этих секторов. Угол облучения зеркала (см. рис. 6) равен $2\psi_{кр}$.

Разбиение секторов определяется чисто геометрическими соображениями. Границам секторов соответствуют переходные области, из которых табл. 1 выделены основные — главный лепесток диаграммы, задний лепесток, краевые лепестки облучателя и дальнего края.

2. КРАЕВАЯ ВОЛНА (*О—Н—Р*)

Асимптотика строгих решений дифракционных задач для тел с острой кромкой (см., например, [4]) вдали от границы свет — тень содержит волну, исходящую от кромки,— цилиндрическую для полуплоскости,

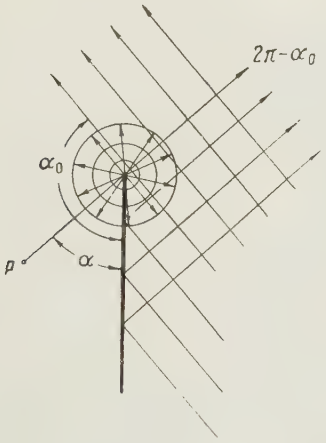


Рис. 3. К анализу краевой волны

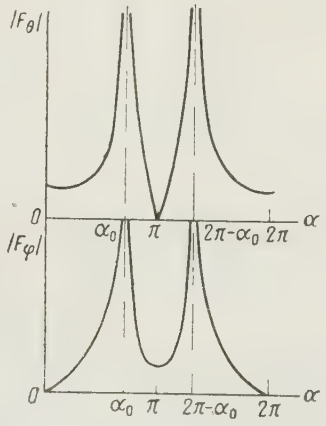


Рис. 4. Графики F_θ и F_φ

сфероидальную для диска. Наличие краевой волны не связано со строгостью решения. Член, соответствующий краевой волне, имеется также и при решении в кирхгофовском приближении [5, 6].

Краевая волна связана с излучением токов, текущих по последней, краевой зоне Френеля на поверхности зеркала. Поскольку ширина зоны зависит от точки наблюдения, краевая волна имеет «диаграмму» и зависит от деталей распределения токов в зоне Френеля.

Из решения для полуплоскости [4] следует, что при $kr \gg 1$, т. е. на расстоянии одной-двух волн от кромки, при первичной волне с вектором $\vec{H}_0$, параллельным кромке,

$$\vec{H}_{\text{кр}} = \vec{H}_0 \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i\left(kr+\frac{\pi}{4}\right)} F_\theta;$$

$$F_\theta = \frac{\sin\frac{\alpha_0}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha - \cos\alpha_0}, \tag{1}$$

при падении волны с вектором $\vec{E}_0$, параллельным кромке,

$$\vec{E}_{\text{кр}} = \vec{E}_0 \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i\left(kr+\frac{\pi}{4}\right)} F_\varphi; \quad F_\varphi = \frac{\cos\frac{\alpha_0}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha - \cos\alpha_0}, \tag{2}$$

где $\vec{H}_0$, $\vec{E}_0$ — напряженность первичного поля на краю зеркала; r — расстояние от кромки до точки наблюдения; α_0 — угол падения; α — угол наблюдения (см. рис. 3).

Графики F_φ и F_θ приведены на рис. 4. Направление $2\pi - \alpha_0$ соответствует зеркально-отраженной волне, а α_0 — падающей волне. Запишем

также для сравнения выражение для краевой волны в кирхгофовском приближении при первичной волне с вектором $\vec{E}_0$, параллельным кромке

$$\vec{E}_{кр} = \vec{E}_0 \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left(kr + \frac{\pi}{4}\right)} F_к; \quad F_к = \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha - \cos \alpha_0}. \tag{3}$$

Интересно отметить, что если отсчитывать углы от направления отраженной волны

$$\alpha = 2\pi - \alpha_0 - \theta, \tag{4}$$

то в кирхгофовском приближении

$$F_к = \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha_0}{\sin \theta \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 (1 - \cos \theta)},$$

и для $\theta \ll 1$ получим диаграмму краевой волны в апертурном приближении:

$$F_a = \frac{1}{2 \sin \theta}. \tag{5}$$

Формула (5) при $\theta \ll 1$ следует также и из формул (1), (2).

Поле краевой волны, порождаемое токами на зеркале, не передает характера излучения этих токов в направлении главного лепестка и краевого лепестка, где F_φ и F_θ принимают бесконечно большие значения. В этих направлениях целесообразно вместо использования краевых волн представить полное поле в виде интеграла по полной системе токов по зеркалу (как по равномерной, так и по неравномерной составляющей, см. например, [6]).

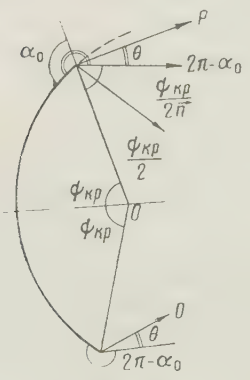


Рис. 5. Соотношение между углами α_0, $\psi_{кр}$ и θ в параболическом зеркале

Поскольку боковое излучение (без учета многократных отражений и т. д.) образуется за счет интерференции краевых волн, исходящих от противоположных краев зеркала, то из (1) — (5) следует, что: а) огибающая лепестков бокового излучения не убывает монотонно с ростом θ, так как $F(\theta)$ не являются монотонными функциями θ; б) огибающая бокового излучения определяется только ориентацией краев зеркала, т. е. не зависит от общей формы зеркала.

Следовательно, при разных формах зеркал, но при одинаковой ориентации краев, боковое излучение остается неизменным; г) зеркало не обладает фазовым центром.

Поясним последний вывод. Выразим α и α_0 через $\psi_{кр}$ и θ (рис. 5):

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\psi_{кр}}{2}, \tag{6}$$

$$\alpha = 2\pi - \alpha_0 - \theta \tag{7}$$

для верхнего края зеркала и

$$\alpha = 2\pi - \alpha_0 + \theta \tag{8}$$

для нижнего края зеркала.

Минимум лепестков при $\theta \ll 1$ отличен от нуля:

$$f_{E\,мин} \simeq \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi_{кр}}{2}\right) \neq 0; \quad f_{H\,мин} \simeq \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi_{кр}}{2}\right) \neq 0 \tag{9}$$

для E-плоскости и H-плоскости.

Следовательно, диаграмма зеркала не имеет нулей.

Приведенные выкладки относились к цилиндрическому зеркалу, у которого краевая волна чисто цилиндрическая. Для осесимметричного зеркала с точечным облучателем цилиндрическую краевую волну нужно заменить тороидальной волной, которая в конце концов развертывается в сферическую. Используя метод стационарной фазы, легко показать, что при расчете диаграммы зеркала диаграмма краевой волны для полуплоскости в стационарной точке контура должна быть умножена на $(\sin\theta)^{-1/2}$. Выше предполагалось, что край зеркала имеет острую кромку, а освещение края зеркала конечно. Для «нулевых» освещений кромки интенсивность краевой волны и ее диаграмма изменяются.

Оценим теперь влияние закругления кромки зеркала. Если $k\rho \geqslant 2$—3, где ρ — радиус закругления кромки, то расчет краевой волны можно вести по законам геометрической оптики. Из них следует, что амплитуда краевой волны у зеркала с закругленной кромкой не зависит от λ, т. е. выше, чем у зеркала с острой кромкой, а соответствующие лучи расходятся в сторону от оси зеркала. Поэтому лучи от разных краев не интерферируют между собой и боковое излучение имеет монотонный характер. В области затенения ($\theta > \pi - \psi_{кр}$) поле краевой волны меньше, чем в случае зеркала с острой кромкой. Многократные отражения в зеркалах с закругленной кромкой отсутствуют.

3. МНОГОКРАТНЫЕ ОТРАЖЕНИЯ КРАЕВОЙ ВОЛНЫ (*О—Н—R—P*: *О—Н—R—R—P* и т. д.)

На расстоянии (1—2) λ от кромки краевая волна может рассматриваться как волна, излученная нитью тока, расположенной на кромке. Анализ такого источника для случаев цилиндра и сферы показывает, что асимптотически поле вблизи вогнутой поверхности можно рассматривать как сумму лучей геометрической оптики и поле поверхностной волны, прижатой к вогнутой стенке (эффект «шепчущей галереи»). Поскольку мы не рассматриваем кратных дифракций, то за исключением небольшого сектора углов при $\theta \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{\psi_{кр}}{2}$ достаточно проанализировать лишь отражение с помощью геометрической оптики.

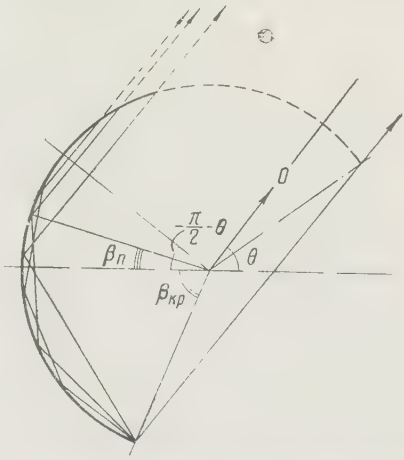


Рис. 6. Лучи, отражаемые зеркалом под углом θ

Рассмотрим вначале многократные отражения краевой волны в сферическом зеркале, так как оно близко по форме к параболическому, а геометрия многократных отражений в нем проще. Исследуем влияние многократных отражений на дальнее поле (т. е. на диаграмму).

На рис. 6 показано построение всех лучей, уходящих от зеркала под углом θ. Луч однократного отражения (*О—Н—R—P*) не затенен. Лучи двукратного и трехкратного отражений (*О — Н — R — R — Т — Р*; *О — Н — R — R — R — Т — Р*) затенены.

Эти лучи мы получим, продолжая $n+1$-ю сторону правильного незамкнутого многоугольника, опирающегося на угол $2\left(\beta_{кр} + \frac{\pi}{2} - \theta\right)$ и состоящего из $2n+1$ звена. Угол β_n точки отрыва луча определяется соотношением

$$\beta_n = \left(\beta_{кр} + \frac{\pi}{2} - \theta\right)\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) - \beta_{кр}. \qquad (10)$$

Граница $\beta_n = \beta_{кр}$ определяет сектор с n отраженными лучами. Из (10) видно, что если сектор $\frac{\pi}{2} - \psi_{кр} < \theta < \frac{\pi}{2} - \frac{\psi_{кр}}{2}$ многократных отражений принять за единицу, то участок $(0, {}^1/_2)$ занят однократными отражениями; $({}^1/_2, {}^2/_3)$ — двукратными; $({}^2/_3, {}^3/_4)$ — трехкратными и т. д.

Сектор многократных отражений с затенением $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi_{кр}}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ делится несколько иначе. Если отсчет вести от угла $\pi/2$, то часть $(0, {}^1/_2)$

Рис. 7. Секторы многократных отражений

вообще не содержит многократных отражений; $({}^1/_2, {}^2/_3)$ — однократные; $({}^1/_3, {}^3/_4)$ — двукратные и т. д. отражения (см. рис. 7). Отражения большей кратности в первом случае отсутствуют, а во втором случае затенены самим зеркалом.

Угол χ выхода луча из точки H_2, уходящего в бесконечность под углом θ, после n отражений определяется формулой

$$\chi = 2\pi - \frac{\beta_{кр} + \frac{\pi}{2} - \theta}{2n+1}, \tag{11}$$

что определяет расширение луча после n отражений:

$$\nu = \frac{d\theta}{d\chi} = 2n + 1. \tag{12}$$

Таким образом, амплитуда n-кратно отраженного луча уменьшается в $(2n+1)^{-1/2}$ раз. Путь, проходимый лучом (относительно пути из центра окружности A), равен

$$L \simeq R_0\left(\beta_{кр} + \frac{\pi}{2} - \theta\right)\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\beta_{кр} + \frac{\pi}{2} - \theta}{2n+1}\right)^2\right].$$

Сомножитель $R_0\left(\beta_{кр} + \frac{\pi}{2} - \theta\right)$ равен пути по дуге; второй сомножитель показывает, насколько путь по хорде короче пути по дуге. Фактически разность путей по хорде и по дуге для обычных длин волн мала для лучей, отраженных двукратно и большее количество раз, и поэтому все отраженные лучи можно рассматривать совместно. Однако при сложении лучей разной кратности необходимо учитывать также, что каждое отражение дает дополнительную фазу π, а прохождение луча через каустику — скачок фазы на $\pi/2$. Следовательно, суммарная амплитуда всех отраженных лучей пропорциональна полю от однократно отраженного луча, и при грубом расчете диаграммы с требуемой степенью точности достаточно учи-

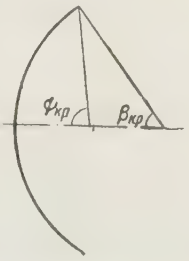
рвать лишь луч однократного отражения, полагая

$$\left| \sum_{q=1}^{n} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}q}}{\sqrt{2q+1}} \right| \simeq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

чу однократного отражения в случае цилиндрического зеркала соотстствует поле

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left(kL_1 - \frac{\pi}{4}\right)} F\left(2\pi - \frac{\beta_{кр} + \frac{\pi}{2} - \theta}{3}\right), \tag{13}$$

опорциональное полю краевой волны в направлении выхода луча до ражения и обратно пропорциональное корню из коэффициента расшиния луча после отражения. Для осесимметричного ркала с игольчатым лучом удобнее рассмотреть конус чей, уходящих от кромки в интервале углов (χ, $\chi + d\chi$), и конус лучей после отражения, уходящих в



с. 8. К соотношению между сферическим и параболическим зеркалами

нтервале углов (θ, $\theta + d\theta$). Представив уравнение энергетического аланса для этих пучков в виде

$$\frac{F^2(\chi)}{\cos(\beta_{кр} - \chi)} \cos(\beta_{кр} - \chi)\, 2\pi\, d\chi = F^2(\theta) \sin\theta\, d\theta,$$

олучим

$$F(\theta) = \frac{F(\chi)}{\sqrt{\chi \sin\theta}}. \tag{14}$$

тсюда следует, что, так же, как и в случае цилиндрических зеркал, осле отражения амплитуда уменьшается в $\nu^{-1/2}$ раз.

При расчетах отраженных лучей в параболическом зеркале можно спользовать формулы (13) и (14), в которых необходимо только выразить $\beta_{кр}$ через $\psi_{кр}$. Поскольку сферическое зеркало близко к параболическому, если источник расположен на половине радиуса сферы, то (см. рис. 8) $\beta_{кр}$ определяется из уравнения

$$\sin\psi_{кр} = \frac{\sin\beta_{кр}}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\beta_{кр}}}. \tag{15}$$

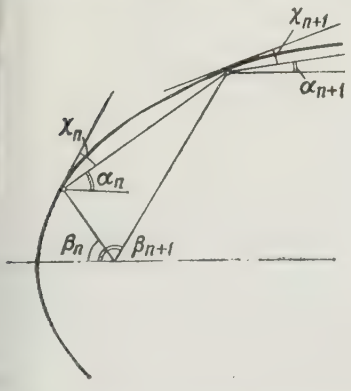


Рис. 9. К геометрии многократных отражений в параболоиде вращения

Точные соотношения для многократных отражений в параболоиде см. рис. 9) можно представить в виде рекуррентных соотношений

$$\chi_n + \chi_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}}{2} - \frac{\beta_n}{2}, \tag{16}$$

$$\alpha_n + \alpha_{n+1} = \pi - \beta_{n+1}, \tag{17}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta_{n+1}}{2} = 2\operatorname{ctg}\alpha_n - \operatorname{tg}\frac{\beta_n}{2}. \tag{18}$$

Для скользящих отражений $\chi \ll 1$ угол скольжения χ почти не изменяется:

$$\chi_{n+1} \simeq \chi_n - 4\operatorname{tg}\frac{\beta_n}{2}\chi_n^2. \tag{19}$$

Зависимость α_{n+1} от χ_n определяется формулой

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_{n+1}}{2} = \frac{1 + \left[2\operatorname{tg}\left(\frac{\beta_n}{2} + \chi_n\right) - \operatorname{tg}\frac{\beta_n}{2}\right]\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta_n}{2} - \frac{\chi_n}{2}\right)}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\beta_n}{2} + \chi_n\right) - \operatorname{tg}\frac{\beta_n}{2} + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta_n}{4} - \frac{\chi_n}{2}\right)}. \tag{20}$$

4. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА БОКОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Из проведенного анализа следует, что с точностью до $(kD)^{-3/2}$ боковое излучение зеркала образуется за счет четырех слагаемых: краевых волн, исходящих от дальней и ближней кромок зеркала, краевой волны, однократно отраженной от поверхности зеркала, и поля облучателя.

Эти слагаемые имеют различные фазы и, если более двух из них имеют соизмеримые абсолютные величины, результирующее поле не обладает четкой периодической лепестковой структурой. В областях, где боковое излучение формируется в основном за счет одного луча, оно почти монотонно. Число лучей зависит от затеняющего действия зеркала.

Для практических приложений наибольший интерес представляет не сама интерференционная структура излучения, а его верхняя и нижняя огибающие.

Образуя сумму и разность абсолютных величин, представим выражение для огибающих нормированной диаграммы осесимметричного зеркала при конечном освещении краев, пренебрегая влиянием поля облучателя (его боковым излучением), в виде

$$f(\varphi, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(kD)^{-3/2}(\sin\theta)^{-1/2}\left|F(-\theta) \mp \tilde{\varepsilon}_1 F(\theta)\right|_{\text{мин}}^{\text{макс}} \mp$$

$$\mp \tilde{\varepsilon}_2 \frac{1}{\sqrt{3}} F(\chi)\left|\frac{T(\psi_{\text{кр}})}{r(\psi_{\text{кр}})}\frac{r(0)}{T(0)}\right| \tau(\varphi), \tag{21}$$

где $\left|\frac{T(\psi_{\text{кр}})}{r(\psi_{\text{кр}})}\frac{r(0)}{T(0)}\right|$ — относительное освещение края зеркала; $\tau(\varphi)$ — коэффициент возбуждения краевой волны данной поляризации для точек контура в плоскости φ *; $\tilde{\varepsilon}_1$, $\tilde{\varepsilon}_2$ — функции, принимающие значения 0 или 1 и учитывающие наличие или отсутствие луча; $F(-\theta)$, $F(\theta)$ — диаграмма краевой волны данной поляризации для ближнего и дальнего краев по направлению; $F(\chi)$ — диаграмма краевой волны для луча с отражением.

Поясним отдельные члены выражения (21). Величина относительного освещения края не должна быть меньше 0,3—0,2, так как в этом случае меняются зависимость f от kD и вид функций F.

* Углы φ и θ точки наблюдения отсчитываются в сферической системе координат с полярной осью ($\theta = 0$) по оси параболоида.

Для φ-составляющей поляризации бокового излучения под F нужно понимать F_φ, определенную формулой (2), причем (см. (6), (7), (8), (11))

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\psi_{кр}}{2},$$

для $F(-\theta)$ (верхний край зеркала) нужно полагать

$$\alpha = 2\pi - \alpha_0 - \theta,$$

для $F(\theta)$ (нижний край зеркала)

$$\alpha = 2\pi - \alpha_0 + \theta$$

и для $F(\chi)$

$$\alpha = 2\pi - \frac{\beta_{кр} + \frac{\pi}{2} - \theta}{3}. \qquad (22)$$

Для θ-составляющей поляризации бокового излучения F нужно заменить F_θ по формуле (1) с теми же значениями α, α_0 и χ. Коэффициенты возбуждения φ- и θ-составляющих краевых волн равны

$$\tau_\varphi = (\vec{\varphi}_0 \vec{E}_0), \qquad (23)$$

$$\tau_\theta = |[\vec{\varphi}_0 [\vec{E}_0 \vec{\varphi}_0]]|, \qquad (24)$$

где $\vec{\varphi}_0$ — орт в φ-направлении, а $\vec{E}_0$ — орт поляризации первичной волны на краю зеркала. Значения $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2$ выбираются в соответствии с табл. 1 и 2.

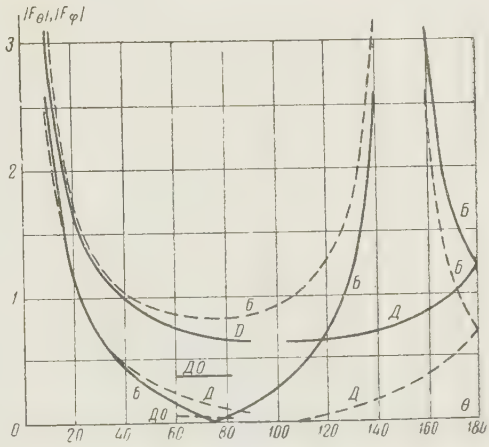


Рис. 10

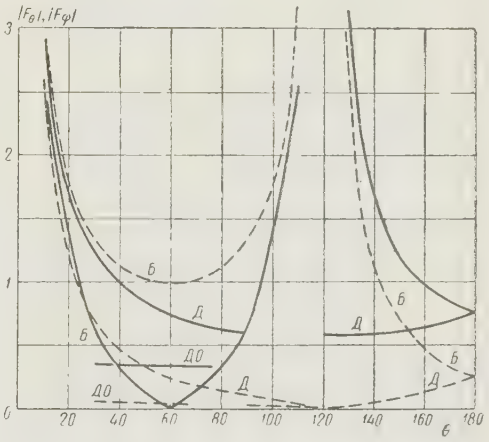


Рис. 11

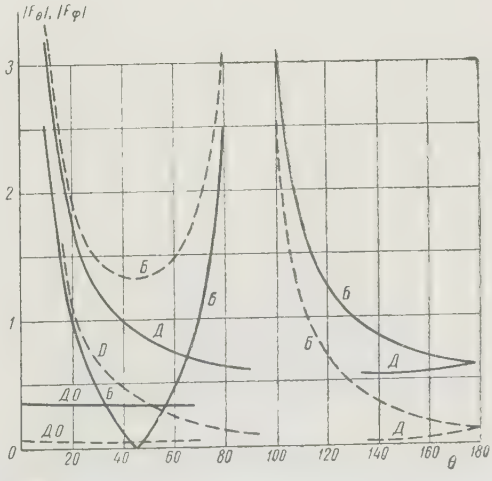


Рис. 12

Рис. 10. Составляющие бокового излучения для зеркала глубины $\psi_{кр} = 30°$:

Д — дальний край зеркала; *Б* — ближний край зеркала; *ДО* — волна дальнего края зеркала, отраженная затем от поверхности; сплошная линия — θ-составляющая; пунктир — φ-составляющая

Рис. 11. Составляющие бокового излучения для зеркала глубины $\psi_{кр} = 60°$. Обозначения те же, что и на рис. 10

Рис. 12. Составляющие бокового излучения для зеркала глубины $\psi_{кр} = 90°$. Обозначения те же, что и на рис. 10

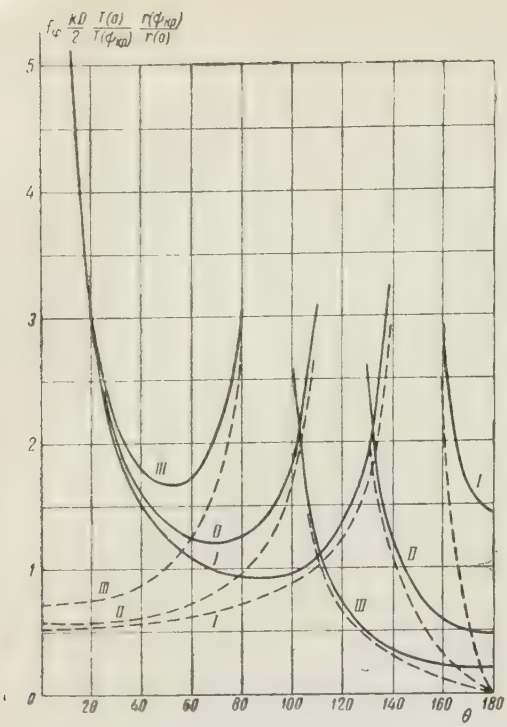


Рис. 13. Огибающая бокового излучения по φ-составляющей для цилиндрического зеркала (масштаб по оси ординат пропорционален $\left[\frac{r(\psi_{кр})}{r(0)}\right]^{1/2}$),

$I - \Psi_{кр} = 30°$; $II - \Psi_{кр} = 60°$; $III - \Psi_{кр} = 90°$; сплошная линия — максимум; пунктир — минимум

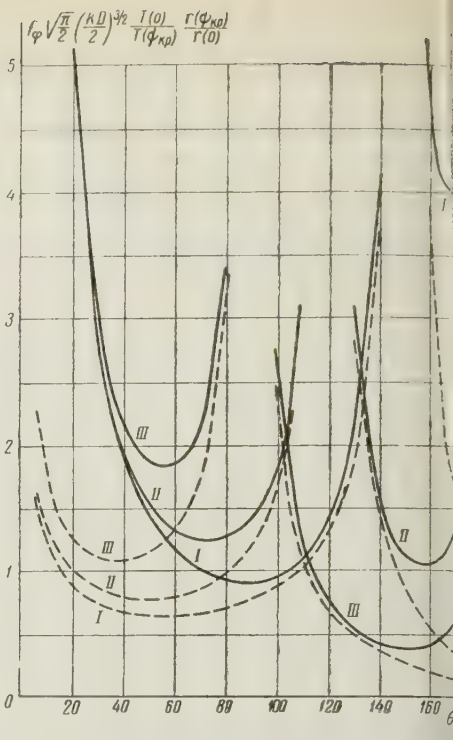


Рис. 14. Огибающая бокового излучения по φ-составляющей для осесимметричного зеркала: (масштаб по оси ординат пропорционален $\left[\frac{r(\psi_{кр})}{r(0)}\right]^{1/2}$)

$I - \Psi_{кр} = 30°$; $II - \Psi_{кр} = 60°$; $III - \Psi_{кр} = 90°$; сплошная линия — максимум; пунктир — минимум

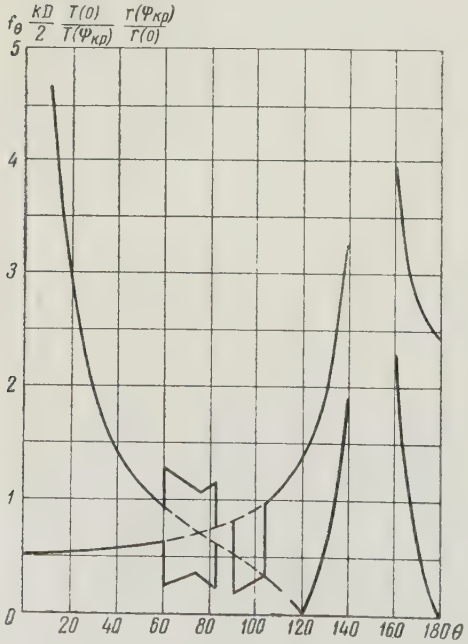


Рис. 15. Огибающая диаграммы цилиндрического зеркала по θ-составляющей, $\Psi_{кр} = 30°$ (масштаб по оси ординат пропорционален $\left[\frac{r(\psi_{кр})}{r(0)}\right]^{1/2}$)

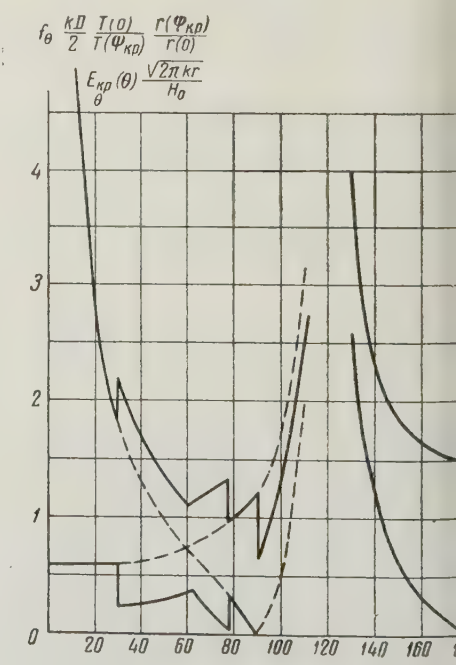


Рис. 16. Огибающая диаграммы цилиндрического зеркала по θ-составляющей $\Psi_{кр} = 60°$

На рис. 10—12 приведены графики $F_{\varphi,\theta}(-\theta)$; $F_{\varphi,\theta}(\theta)$; $F_{\varphi,\theta}(\chi)$ для зеркал различной глубины ($\psi_{кр} = 30;\ 60;\ 90°$). Из графиков следует, что по φ-компоненте поля (например, диаграмма в *H*-плоскости) основной луч для незатененного сектора исходит от ближней кромки зеркала, интенсивность луча от дальнего края зеркала мала. Переотраженный луч ($\chi \simeq 2\pi$) имеет малую амплитуду, так как $F_{\varphi}(2\pi) = 0$. Наоборот, для θ-составляющей бокового излучения (например, диаграмма в *E*-плоскости) ближняя кромка дает относительно малый вклад, так как $F_{\theta}(\pi) = 0$.

Основной вклад дает дальний край, а величина переотраженного луча относительно велика $\left(\text{особенно вблизи сектора } \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\psi_{кр}}{2}\right)$ и определяет интерференционный характер излучения. Положение меняется на обратное вблизи края зеркала ($\theta = \pi - \psi_{кр}$) и в секторе затенения, где ближний край светит сильнее (или вообще является единственным источником). Боковое излучение по φ-составляющей поля имеет более плавный характер, чем по θ-составляющей. Из (21) следует, что поляризация бокового излучения для каждого луча определяется соотношением составляющих в сумме

$$\vec{\theta}_0 f_{\varphi}(\vec{\varphi}_0 \vec{E}_0) + \vec{\theta}_0 f_{\theta} | [\vec{\varphi}_0 [\vec{E}_0 \vec{\varphi}_0]] |, \quad (25)$$

каждая из которых синусоидально зависит от φ с периодом π. Зависимость от глубины зеркала $\psi_{кр}$ монотонная. При увеличении $\psi_{кр}$ боковое излучение концентрируется в передней полусфере.

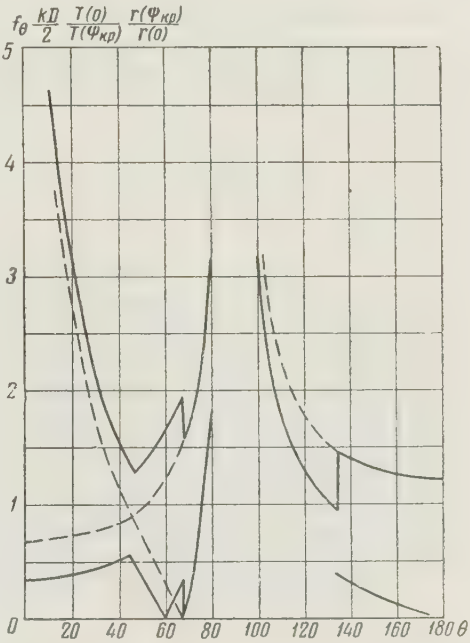


Рис. 17. Огибающая диаграммы цилиндрического зеркала по θ-составляющей, $\psi_{кр} = 90°$ (масштаб по оси ординат пропорционален $\left[\frac{r(\psi_{кр})}{r(0)}\right]^{1/2}$)

На рис. 13, 14 приведены огибающие бокового излучения по φ-составляющей для цилиндрического и осесимметричных зеркал. На рис. 15—17 приведены огибающие диаграмм цилиндрических зеркал по θ-составляющей. При расчете учтены секторы затенения облучателя и краевых волн. Разрывы огибающей, из-за затенения краевых волн, смягчаются дифракционными процессами и зависят от *kD*. Выражение (21) нормировано по максимуму главного лепестка. Максимум краевого лепестка облучателя ограничен величиной $(G_{обл}/G_{ант})^{1/2}$, так как зеркало для него играет роль обычного затеняющего экрана. Огибающие диаграмм вблизи главного лепестка пропорциональны $(\sin\theta)^{-1}$ для цилиндрических и $(\sin\theta)^{-3/2}$ для осесимметричных зеркал. Огибающие краевых лепестков облучателя в обоих случаях пропорциональны $|\sin(\pi - \theta)|^{1/2}$. Наконец, огибающая заднего лепестка ($\theta \simeq \pi$) для осесимметричных зеркал пропорциональна $\sin(\pi - \theta)^{1/2}$. Зависимость от размера зеркала и длины волны — $(kD)^{-1}$ для цилиндрических и $(kD)^{-3/2}$ для осесимметричных зеркал.

Проведенный выше анализ огибающих бокового излучения относился к случаю спадения освещения у краев зеркал не более чем на 10—20 *об.*

Расчет главного лепестка диаграмм проще производится по апертур-

ному методу (параболическое зеркало) или при помощи геометрической оптики и краевых волн. Область эффективного применения токового метода относительно невелика и ограничена секторами краевых лепестков.

Если не учитывать условия затенения ближнего поля облучателя, краевой составляющей тока и многократных отражений, то расчет по изложенному выше методу дает те же результаты, что и расчет диаграммы токовым методом (см., например, [7, 8]). Фактическое различие в расчетах по обоим методам при учете условия затенения для облучателя относительно невелико и не превосходит 6—8 *дб*, хотя расчет «лучевым» методом несомненно проще, нагляднее и учитывает все члены одного порядка малости.

Усовершенствование токового метода должно учесть, в частности, ток от многократно отраженных лучей и волны шепчущей галереи, возбуждаемых краевой волной. Эти составляющие отнюдь не малы и составляют, например, для зеркала диаметра 100 λ от 0,16 у края до 1,2 в центре по первой и от 0,22 у края до 1,5 в центре по второй составляющим относительно составляющей $2[\vec{n}\vec{H}_0]$. В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Л. А. Вайнштейну за дискуссию и советы при написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. B. Keller, Diffraction by a aperture, J. Appl. Phys., 1957, 28, 2, 426.
2. J. B. Keller, Diffraction by convex cylinder, IRE Trans., 1956, AP-4, 3, 312.
3. Б. Е. Кинбер, Условие затенения и дифракционная поправка к распределению тока, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 9, 1407.
4. Л. А. Вайнштейн, Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, Изд. Советское радио, 1953.
5. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитное поле, Изд. Советское радио, 1957.
6. П. Я. Уфимцев, Вторичная дифракция электромагнитных волн по ленте, ЖТФ, 1958, 28, 3, 569.
7. Ю. К. Муравьев, В. А. Варюхин, Расчет бокового и обратного излучения антенны в виде параболоида вращения, Тр. Академии, 1952, сб. 31, стр. 117.
8. Л. Б. Тартаковский, Боковое излучение идеального параболоида, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 6, 920.

Поступила в редакцию
11 V 1960

СИММЕТРИЧНОЕ ОБЛУЧЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

П. Я. Уфимцев

Статья посвящена уточнению приближения Кирхгофа для конечных тел вращения, поверхность которых имеет изломы. Уточнение основано на приближенном учете возмущения поля изломом и выполнено для случая облучения тел вдоль их оси симметрии. Вычислена эффективная поверхность рассеяния конечного конуса и параболоида вращения. Проведено сравнение с результатами эксперимента.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих телах конечных размеров, поверхность которых имеет изломы, представляет значительный интерес, но ввиду своей сложности до сих пор не получила удовлетворительного решения. В области радиоволн, коротких по сравнению с линейными размерами объектов, обычно пользуются решением в приближении Кирхгофа, но последнее нередко приводит к неправильным результатам и нуждается в уточнении.

В частном случае, при облучении выпуклых тел вращения вдоль их оси симметрии, мы нашли уточненные выражения для эффективной поверхности рассеяния. Метод расчета, использованный при этом, изложен нами ранее [1, 2] и заключается в том, что рассеянное поле определяется в виде суммы «равномерной» и «неравномерной» составляющих. Равномерная составляющая представляет собой рассеянное поле в приближении Кирхгофа и находится путем интегрирования поверхностного тока

$$\vec{j} = \frac{c}{2\pi}[\vec{n}\vec{H}],$$

где c — скорость света в вакууме; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности тела; $\vec{H}$ — магнитное поле падающей волны. Неравномерная составляющая — дополнительное поле, обусловленное изломом поверхности, которое необходимо учитывать для получения более правильных результатов. Если линейные размеры тела велики по сравнению с длиной волны, то поверхностные токи, возбуждающие это поле и локализованные вблизи излома, можно приближенно считать на каждом элементе излома такими же, как и на краю соответствующего двугранного угла.

Очевидно, что токи, обусловленные круговым изломом любой выпуклой поверхности вращения, будут такими же, как на соответствующем коническом теле (рис. 1). Поэтому неравномерную составляющую поля целесообразно изучить на примере этого тела.

1. НЕРАВНОМЕРНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ПОЛЯ

Пусть плоская электромагнитная волна падает на коническое тело в положительном направлении z оси (рис. 1). Из уравнений

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{ik}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} + k^2\vec{A}, \\ \vec{H} &= \operatorname{rot}\vec{A}\,, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

находим следующие выражения для рассеянного поля в волновой зоне

$$\left.\begin{aligned} E_x &= H_y = ikA_x, \\ E_y &= -H_x = ikA_y \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \vartheta = 0 \tag{2}$$

и

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -H_y = ikA_x, \\ E_y &= H_x = ikA_y \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \vartheta = \pi. \tag{3}$$

При этом неравномерной составляющей тока, текущего вблизи кругового излома конической поверхности, соответствует вектор-потенциал

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\frac{e^{ikr}}{r}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{l_1}\vec{j}_1(\zeta)\,e^{\pm ik\zeta\cos\omega}(a-\zeta\sin\omega)\,d\zeta + \right.$$

$$\left. + \int_0^{l_2}\vec{j}_2(\zeta)\,e^{\mp ik\zeta\cos\Omega}(a-\zeta\sin\Omega)\,d\zeta\right]d\psi$$

или

$$\vec{A} = \frac{a}{c}\frac{e^{ikr}}{r}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\infty}\vec{j}_1(\zeta)\,e^{\pm ik\zeta\cos\omega}\,d\zeta + \int_0^{\infty}\vec{j}_2(\zeta)\,e^{\mp ik\zeta\cos\Omega}\,d\zeta\right]d\psi, \tag{4}$$

так как $\vec{j}_{1(2)}(\zeta) \neq 0$ лишь вблизи излома ($\zeta = 0$). Здесь верхний знак в экспонентах относится к случаю $\vartheta = 0$, а нижний — к случаю $\vartheta = \pi$.

$\vec{j}_1$ — ток, текущий слева от излома,

$\vec{j}_2$ — ток, текущий справа от излома,

r — расстояние от излома до точки наблюдения.

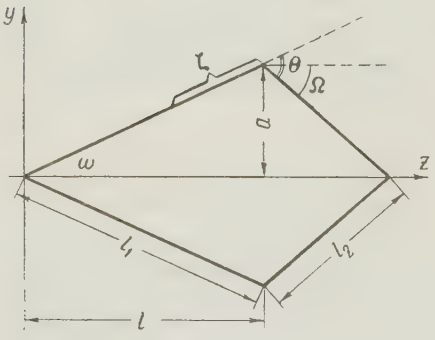


Рис. 1

Неравномерную составляющую тока на достаточно малом элементе

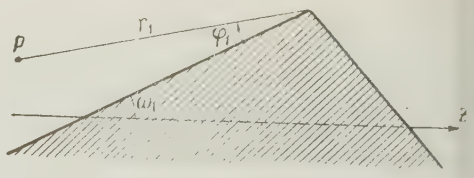


Рис. 2

конической поверхности, вблизи ее излома, можно считать приближенно такой же, как на соответствующем клине (рис. 2). В местной цилиндрической системе координат (r_1, φ_1, z_1) выражение для неравномерной составляющей поля такого клина принимает при $kr_1 \gg 1$ следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} E_{z_1}(\psi) &= -H_{\varphi_1}(\psi) = ikA_{z_1}(\psi), \\ H_{z_1}(\psi) &= E_{\varphi_1}(\psi) = ikA_{\varphi_1}(\psi), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$A(\psi) = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2\pi}{kr_1}}\left[\int_0^{\infty}\vec{j}_1(\zeta)\,e^{\pm ik\zeta\cos\omega}\,d\zeta + \int_0^{\infty}\vec{j}_2(\zeta)\,e^{\mp ik\zeta\cos\Omega}\,d\zeta\right]e^{i\left(kr_1+\frac{\pi}{4}\right)}. \tag{6}$$

Здесь верхний знак в экспонентах относится к случаю $\varphi_1 = \pi + \omega$, а

ижний — к случаю $\varphi_1 = \omega$. В статье [1] показано, что

$$\left.\begin{aligned} E_{z_1}(\psi) &= E_{0\,z_1}(\psi)\, f \frac{e^{i\left(kr_1+\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi k r_1}}, \\ H_{z_1}(\psi) &= H_{0\,z_1}(\psi)\, g \frac{e^{i\left(kr_1+\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi k r_1}}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

е $E_{0z_1}(\psi)$, $H_{0z_1}(\psi)$ — значения амплитуды падающей волны на ребре лина; f и g — угловые функции неравномерной составляющей поля, ссеянного клином. Введем обозначение

$$= \int_0^\infty (\vec{j}_1(\zeta)\, e^{\pm ik\zeta\cos\omega} + \vec{j}_2(\zeta)\, e^{\mp ik\zeta\cos\Omega})\, d\zeta, \tag{8}$$

гда из формул (5) — (7) следует, что

$$J_{z_1} = \frac{cE_{0\,z_1}(\psi)}{ik2\pi} f, \quad J_{\varphi_1} = \frac{cH_{0\,z_1}(\psi)}{ik2\pi} g. \tag{9}$$

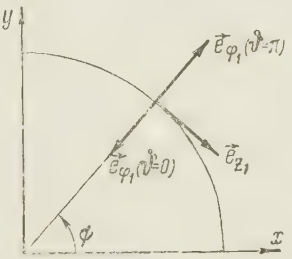


Рис. 3

мпоненты J_{z_1} и J_{φ_1} — взаимно перпендикулярны и параллельны плоости xoy (рис. 3). Различная ориентация орта $\vec{e}_{\varphi_1}$ при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ язана с тем, что угол φ_1 отсчитывается от освещенной грани клина. основной системе координат (x, y, z) вектор $\vec{J}$ имеет составляющие

$$\left.\begin{aligned} J_x &= J_{z_1}\sin\psi - J_{\varphi_1}\cos\psi, \\ J_y &= -J_{z_1}\cos\psi - J_{\varphi_1}\sin\psi \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \vartheta = 0 \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} J_x &= J_{z_1}\sin\psi + J_{\varphi_1}\cos\psi, \\ J_y &= -J_{z_1}\cos\psi + J_{\varphi_1}\sin\psi \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \vartheta = \pi. \tag{11}$$

В соответствии с формулой (9) эти выражения можно представить виде

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \frac{c}{ik2\pi}\,[fE_{0\,z_1}(\psi)\sin\psi - gH_{0\,z_1}(\psi)\cos\psi], \\ J_y &= -\frac{c}{ik2\pi}\,[fE_{0\,z_1}(\psi)\cos\psi + gH_{0\,z_1}(\psi)\sin\psi] \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \vartheta = 0 \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \frac{c}{ik2\pi}\,[fE_{0\,z_1}(\psi)\sin\psi + gH_{0\,z_1}(\psi)\cos\psi], \\ J_y &= -\frac{c}{ik2\pi}\,[fE_{0\,z_1}(\psi)\cos\psi - gH_{0z_1}(\psi)\sin\psi] \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \vartheta = \pi. \tag{13}$$

тождествляя теперь токи вблизи излома конической поверхности с тоами на клине, получим согласно (4)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{ik2\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int_0^{2\pi}[fE_{0\,z_1}(\psi)\sin\psi - gH_{0\,z_1}(\psi)\cos\psi]\,d\psi, \\ y &= -\frac{a}{ik2\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int_0^{2\pi}[fE_{0\,z_1}(\psi)\cos\psi + gH_{0\,z_1}(\psi)\sin\psi]\,d\psi \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \vartheta = 0, \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \frac{a}{ik2\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int_0^{2\pi}[fE_{0\,z_1}(\psi)\sin\psi + gH_{0\,z_1}(\psi)\cos\psi]\,d\psi, \\ A_y &= -\frac{a}{ik2\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int_0^{2\pi}[fE_{0\,z_1}(\psi)\cos\psi - gH_{0\,z_1}(\psi)\sin\psi]\,d\psi \end{aligned}\right\} \text{ при } \vartheta = \pi. \quad (15$$

Пусть падающая плоская волна поляризована так, что $\vec{E}_0 \parallel ox$. Тогда

$$E_{0\,z_1}(\psi) = E_{0x}\sin\psi,\ H_{0z_1}(\psi) = -E_{0x}\cos\psi \quad (16$$

и, следовательно, неравномерная составляющая поля, обусловленная круговым изломом, будет выражаться в соответствии с соотношениями (2), (3) и (14), (15) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= H_y = \frac{aE_{0x}}{2}(f+g)\frac{e^{ikr}}{r}, \\ E_y &= H_x = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \vartheta = 0 \quad (17$$

и

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -H_y = -\frac{aE_{0x}}{2}(f-g)\frac{e^{ikr}}{r}, \\ E_y &= H_x = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \vartheta = \pi. \quad (18$$

Формула (17) применима для значений $0 \leqslant \omega \leqslant \pi/2$, $\omega < \Theta \leqslant$ а формула (18) — для $0 \leqslant \omega \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \Theta \leqslant \pi$. В случае диска ($\omega = \pi/$ $\Theta = \pi$), когда $f = -g = -1/2$ при $\vartheta = 0$ и $f = g = -1/2$ при $\vartheta =$ неравномерная составляющая поля на оси z равна нулю (ср. [2]).

Пользуясь полученными результатами, перейдем к расчету эффективной поверхности рассеяния конкретных тел, предполагая, что они облучаются плоской волной

$$E_x = E_{0x}e^{i(kz-\omega t)}, \quad (1$$

а их линейные размеры велики по сравнению с длиной волны.

2. КОНУС

Пусть конус (рис. 1) облучается плоской электромагнитной волной (19). Равномерная составляющая тока, возбуждаемого при этом на его поверхности, имеет составляющие

$$\left.\begin{aligned} j_x &= \frac{c}{2\pi}E_{0x}\sin\omega\, e^{ikz}, \\ j_y &= 0, \\ j_z &= \frac{c}{2\pi}E_{0x}\cos\omega\cos\psi e^{ikz} \end{aligned}\right\} \quad (20$$

и создает в направлении $\vartheta = \pi$ поле

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -H_y = -E_{0x}\frac{i}{4k}\operatorname{tg}^2\omega\frac{e^{ikR}}{R} + E_{0x}\left(\frac{i}{4k}\operatorname{tg}^2\omega + \frac{a}{2}\operatorname{tg}\omega\right)\frac{e^{ikR}}{R}e^{2ikl}, \\ E_y &= H_x = 0. \end{aligned}\right\} \quad (21$$

Неравномерная же составляющая поля, обусловленная изломом поверхности у основания конуса, определяется согласно (18) выражением

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -H_y = -\frac{aE_{0x}}{2}\left(\operatorname{tg}\omega + \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}}\right)\frac{e^{ikR}}{R}e^{2ikl}, \\ E_y &= H_x = 0, \end{aligned}\right\} \quad (22$$

е

$$n = 1 + \frac{\omega + \Omega}{\pi}. \tag{23}$$

Асимптотическая оценка строгих дифракционных рядов для полу-сконечного конуса [3] показывает, что в направлении $\vartheta = \pi$ можно ренебречь неравномерной составляющей поля, обусловленной конечным острием. Поэтому, суммируя (21) и (22), получим приближенное ражение для рассеянного поля:

$$E_x = -H_y = -E_{0x}\left(\frac{1}{2k}\operatorname{tg}^2\omega\sin kle^{ikl} + \frac{a}{2}\frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}}e^{2ikl}\right)\frac{e^{ikR}}{R}. \tag{24}$$

Эффективная поверхность рассеяния определяется формулой

$$\sigma = \pi a^2 |\Sigma|^2, \tag{25}$$

е функция Σ связана с рассеянным полем соотношением

$$E_x = -H_y = -\frac{aE_{0x}}{2}\frac{e^{ikR}}{R}\sum \tag{26}$$

равна

$$\sum = \frac{1}{ka}\operatorname{tg}^2\omega\sin kle^{ikl} + \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}}e^{2ikl}. \tag{27}$$

налогичную функцию в приближении Кирхгофа можно записать согласно (21) в виде

$$\sum_k = \frac{1}{ka}\operatorname{tg}^2\omega\sin kle^{ikl} - \operatorname{tg}\omega e^{2ikl}. \tag{28}$$

ри деформировании передней части конуса в диск ($\omega \to \pi/2$, $l \to 0$, = const) формулы (27), (28) преобразуются соответственно к виду

$$\left.\begin{aligned}\sum &= -ika - \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},\\ \Sigma_k &= -ika.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

з (27) и (28) далее следует, что для больших значений параметра a ($ka \gg \operatorname{tg}^2\omega$)

$$\sum = \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}}e^{2ikl}, \tag{30}$$

$$\sum_k = \operatorname{tg}\omega e^{2ikl}. \tag{31}$$

аким образом, даже в случае коротких волн ($ka \gg \operatorname{tg}^2\omega$, но $R \gg kl^2$) аше выражение (27) не переходит в формулу физической оптики и существенно от нее отличается:

$$\sigma = \pi a^2\left|\frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}}\right|^2, \tag{32}$$

$$\sigma_k = \pi a^2\operatorname{tg}^2\omega, \tag{33}$$

ткуда

$$\sigma = \sigma_k\left|\frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\left(\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}\right)\operatorname{tg}\omega}\right|^2, \tag{34}$$

т. е. для достаточно коротких волн (или для достаточно больших размеров конуса) функция σ пропорциональна σ_k, причем коэффициент пропорциональности не зависит от размеров конуса, а определяется только его формой.

Этот результат наглядно иллюстрируется расчетами эффективной поверхности рассеяния конуса ($\omega = 10°25'$, $k = \pi$, $\Omega = 90°$) в зависимости от его длины (рис. 4). В то время как наша формула (непрерывная линия) находится в удовлетворительном согласии с экспериментом (отдельные точки $\times$), приближение Кирхгофа (пунктирная линия) дает значения на 13—15 *дб* меньше экспериментальных значений. Особенно большое значение неравномерная составляющая поля имеет для острых конусов. См., например, рис. 5, на котором построена кривая эффективной поверхности конуса ($a = 2{,}75$ *см*, $k = \pi$, $\Omega = 90°$) при деформировании его в диск ($\omega \to 90°$). Расхождение между нашей кривой и приближением Кирхгофа достигает здесь при $\omega \simeq 2°$ почти 30 *дб*.

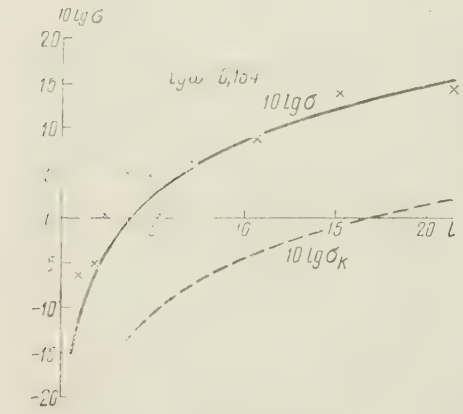


Рис. 4

Заметим, что наше выражение (32) эквивалентно приведенному в работе [4], однако последнее применимо лишь для острых конусов, тогда как у нас, помимо (32), имеется формула (27), пригодная для конусов с любым углом раствора ($0 \leqslant \omega \leqslant \pi/2$).

Полученное нами выражение (27) позволяет также, в отличие от приближения Кирхгофа (28), оценить роль формы теневой части тела и показывает, что отраженный сигнал будет тем больше, чем ближе эта форма к

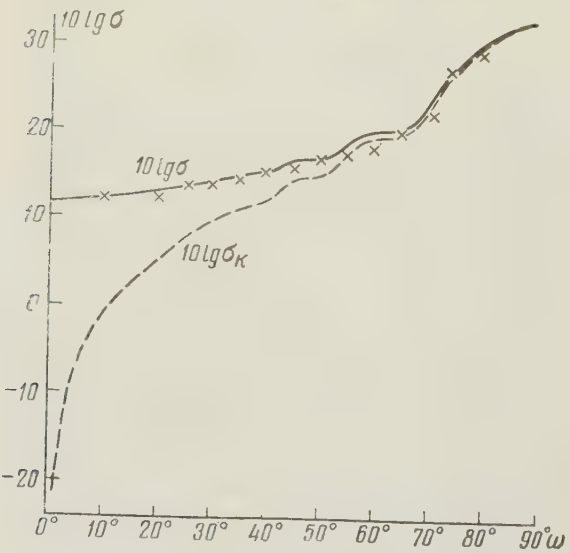


Рис. 5

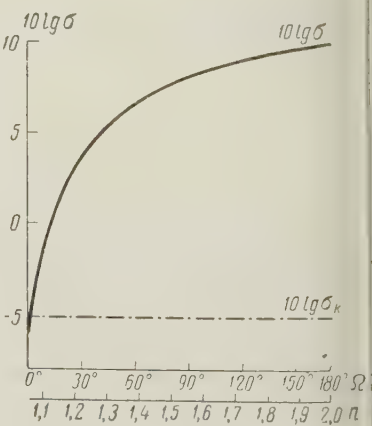


Рис. 6

воронкообразной ($\Omega \simeq \pi - \omega$). Так, например, в случае $\omega = 10°$, $kl = 10\,\pi$ ($k = \pi$) величина сигнала, отраженного конусом, может на 15 *дб* превышать значение, соответствующее приближению Кирхгофа (см. рис. 6), если $\Omega \simeq 170°$.

3. ПАРАБОЛОИД ВРАЩЕНИЯ ($r^2=2pz$)

Равномерная составляющая тока, возбуждаемого на поверхности параболоида (рис. 7) падающей волной (19),

$$\left.\begin{aligned} j_x &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} \sin\alpha e^{ikz}, \\ j_y &= 0, \\ j_z &= \frac{c}{2\pi} E_{0x} \cos\alpha \cos\psi e^{ikz} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

создает в направлении $\vartheta = \pi$ поле

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -H_y = -\frac{aE_{0x}}{2}(1-e^{2ikz})\operatorname{tg}\omega\frac{e^{ikR}}{R}, \\ E_y &= H_x = 0, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

где a — радиус основания параболоида; $l = \frac{a^2}{2p} = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\omega$ — его длина; ω — угол, образуемый осью z и касательной к параболе $r^2 = 2pz$; в точке $z = l$ α принимает значение $\alpha = \omega$ ($\operatorname{tg}\omega = p/a$).

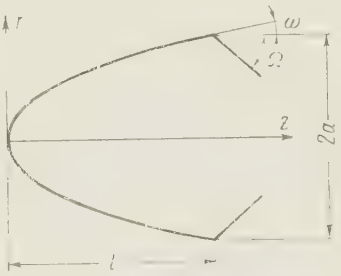


Рис. 7

Неравномерная составляющая поля, обусловленная круговым изломом поверхности параболоида, определяется формулой (22). Неравномерная же составляющая поля, обусловленная гладким искривлением поверхности параболоида, равна нулю при симметричном облучении ($\psi = 0$). Поэтому, суммируя (36) и (22), найдем выражение для результирующего рассеянного поля

$$E_x = -H_y = -\frac{aE_{0x}}{2}\left(\operatorname{tg}\omega + \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}} e^{2ikl}\right)\frac{e^{ikR}}{R}. \tag{37}$$

Следовательно, эффективная поверхность рассеяния параболоида будет определяться соотношением

$$\sigma = \pi a^2 \left| \operatorname{tg}\omega + \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}} e^{2ikl} \right|^2, \tag{38}$$

которое при деформировании параболоида в диск ($\omega \to \pi/2$, $l \to 0$ $a = \text{const}$) преобразуется к виду

$$\sigma = \pi a^2 \left| ika + \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} \right|^2. \tag{39}$$

Сравнивая выражение (38) с формулой

$$\sigma_k = \pi a^2 \operatorname{tg}^2\omega \left| 1 - e^{2ikl} \right|^2, \tag{40}$$

которую дает для эффективной поверхности рассеяния приближение Рытхофа, видим, что они существенно отличаются друг от друга. Действительно, прежде всего обращает на себя внимание осциллирующий характер функции σ_k: отраженный сигнал равен нулю, если по

длине параболоида укладывается целое число полуволн $\left(l = \frac{\lambda}{2} n\right.$, $n = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\left.\right)$, и принимает максимальное значение, если она содержит в себе полуцелое число полуволн $\left(l = \frac{\lambda}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right),\ n = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\right)$.

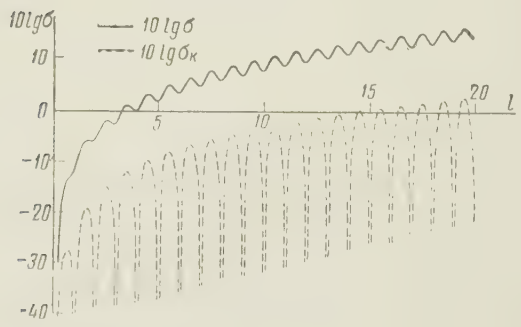


Рис. 8

Проведенный нами по формуле (38) расчет для параболоидов с параметрами $\Omega = 90°$, $\operatorname{tg}\omega = 0{,}1$ $(k = \pi)$ показывает (рис. 8), что хотя осциллирующий характер эффективной поверхности рассеяния сохраняется, амплитуда осцилляций составляет всего лишь около $2\ дб$, а максимальные значения функции σ превышают соответствующие значения в приближении Кирхгофа почти на $13\ дб$. Еще более сильное расхождение между результатами нашей теории и приближением Кирхгофа обнаруживается при деформировании параболоида в диск (рис. 9, $ka = 3\pi$, $k = \pi$, $\Omega = 90°$, $\omega \to 90°$).

Как и в случае конуса, существенное влияние на величину отраженного сигнала оказывает форма теневой части. Например, для параболоидов с параметрами $ka = 2\pi$, $kl = 10\pi$, $\operatorname{tg}\omega = 0{,}1$ $(k = \pi)$ величина отраженного сигнала возрастает при увеличении угла Ω $(\omega < \Omega < \pi$ — $\ldots$ на $44\ дб$ (рис. 10)!

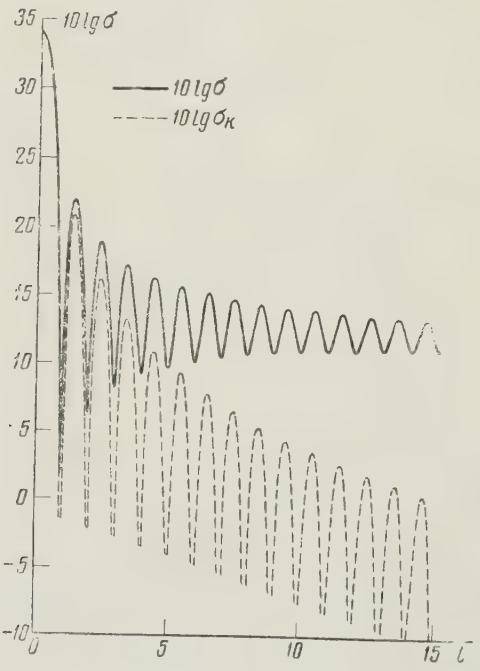


Рис. 9

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье вычислена эффективная поверхность рассеяния конечного конуса и параболоида вра

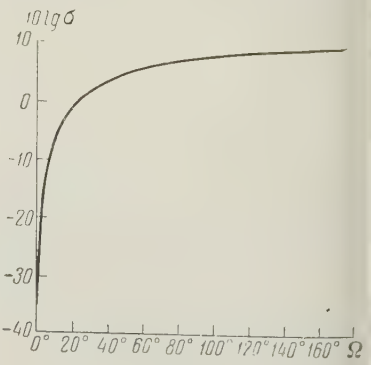


Рис. 10

щения. Линейные размеры тел предполагаются большими по сравнению с длиной волны, а их поверхность — идеально проводящей. Облучение электромагнитными волнами производится вдоль оси симметрии. Используется абсолютная система единиц Гаусса.

Полученные выражения пригодны как для выпуклых, так и для вогнутых тел, но в последнем случае требуется, чтобы вогнутые участки поверхности находились в области тени.

Расчеты показали, что величина отраженного сигнала существенно зависит от формы теневой части тела и возрастает с увеличением ее вогнутости. Однако, поскольку неравномерная составляющая обусловлена элементами поверхности, прилегающими к излому, то та часть затененной поверхности, которая удалена от излома на несколько длин волн, уже не влияет на величину отраженного сигнала и может быть произвольной.

Интересно, что наши выражения, находящиеся в удовлетворительном согласии с экспериментом, даже при больших (по сравнению с λ) размерах тел не переходят в формулы физической оптики и существенно от них отличаются. В то же время приближение Кирхгофа, вопреки распространенному мнению о его надежности в таких случаях, приводит к значительному расхождению с экспериментом.

Полученные в статье результаты позволяют рассчитать эффективную поверхность рассеяния при симметричном облучении любого выпуклого тела вращения, поверхность которого имеет круговые изломы.

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность Е. Н. Майельсу и Л. С. Чугуновой за предоставление экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

П. Я. Уфимцев, ЖТФ, 1957, **27**, 8, 1840.
П. Я. Уфимцев, ЖТФ, 1958, **28**, 11, 2604.
L. B. Felsen, J. Appl. Phys., 1955, **26**, 2, 138.
K. M. Siegel, R. F. Goodrich, V. H. Weston, Appl. Scient. Res. B, 1959, 8, p. 8.
C. E. Schensted, J. Appl. Phys., 1955, **26**, 3, 306.

Поступила в редакцию
28 IV 1960

РЕЗОНАНСНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

С. Дядьков

Исследованы свойства резонансных преобразований вида $D_\omega(t) = \int_0^t f'(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$ и $F_\omega(t) = \int_0^t f(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$ и их изображений в комплексной плоскости. Эти преобразования имеют тесную связь со спектральными функциями и особенно со спектральной плотностью текущего спектра. Кроме того, как показано в статье, эти преобразования могут быть целесообразно использованы при представлении колебательного процесса в контуре без потерь, на вход которого подключено напряжение, равное исследуемой функции $f(\tau)$, и собственная частота которого равна частоте преобразования ω. Это дало автору основание назвать эти преобразования «резонансными». Несмотря на то, что резонансные преобразования имеют тесную связь с областями, очень хорошо изученными, их свойства до сих пор неизвестны широкому кругу научных и технических работников и использовались до сих пор в литературе очень редко и неполностью [3, 5]. В статье приведен ряд теорем, касающихся свойств резонансных преобразований и их связи со спектрами и переходными колебательными процессами. Приведены также соображения о возможности распространения метода резонансных преобразований на контуры с потерями и нелинейным сопротивлением. Наконец, указаны некоторые применения метода резонансных преобразований для решения переходных процессов.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ

Незатухающими резонансно-преобразованными функциями исследуемого процесса, выраженного функцией времени $u = f(\tau)$, будем называть выражения

$$D_\omega(t) = \int_{0-}^{t} f'(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau, \tag{1}$$

$$F_\omega(t) = \int_0^t f(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau. \tag{2}$$

Кривые, изображающие эти функции в комплексной плоскости, будем называть незатухающими резонансными изображениями, а математические операции, определяемые выражениями (1) и (2), — незатухающими резонансными преобразованиями. Для уточнения в некоторых случаях операцию (1) будем называть производным незатухающим резонансным преобразованием функции $f(\tau)$, а операцию (2) — основным незатухающим преобразованием. Для краткости изложения часто будем пользоваться сокращенными названиями, например: преобразованная $D_\omega(t)$, изображение $D_\omega(t)$ и т. д. Необходимо подчеркнуть, что преобразованные $D_\omega(t)$ и $F_\omega(t)$ являются функциями времени t как верхнего предела интегралов (1) и (2), определенными для данного значения угловой частоты преобразования ω. Как показано ниже, $D_\omega(t)$ и $F_\omega(t)$ численно представляют переменные комплексные амплитуды напряжений на емкости и индуктивности в последовательном резонансном незатухающем контуре с собственной угловой частотой $\omega_к$, равной угловой частоте

еобразования ω, на вход которого подключено напряжение $u = f(\tau)$. о обстоятельство дало право автору назвать преобразования (1) и (2) затухающими резонансными преобразованиями.

Представления о резонансных преобразованиях можно распростра- ть и на затухающие контуры. В этом случае будем иметь дело с тухающими резонансными преобразованиями.

В данной статье ограничимся рассмотрением таких функций $f(\tau)$, торые могут представлять реальные физические процессы, т. е. торые автоматически удовлетворяют условиям Дирихле.

Длительность рассматриваемых нами реальных процессов $f(\tau)$ будем итать конечной (за исключением § 8); момент начала процесса будем означать $\tau_н \geqslant 0$, а момент конца процесса $\tau_к$. Поэтому $f(\tau) = 0$ для ех $\tau \leqslant 0$ и всех $\tau \geqslant \tau_к$.

2. СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕЗОНАНСНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Для получения изображения (1) в комплексной плоскости нужно кладывать последовательно один за другим бесконечно малые прира- ения $f'(\tau)\,d\tau$ (а в случае скачков $f(\tau)$ — конечные) в направлениях, анных соответствующими множителями $e^{-j\omega\tau}$, т. е. под углом

$$\varphi = -\omega\tau \tag{3}$$

действительной оси координат. Способ механизации этого интегриро- ания описан в [1].

Так как направление бесконечно малого отрезка прямой совпадает направлением касательной, то из (3) следует теорема касательной, праведливая для всех резонансных изображений (основных и производ- ых, незатухающих и затухающих).

Теорема 1. Направление касательной к резонансному изображению ункции $f(\tau)$ в точке, соответствующей моменту τ, дано углом $\varphi = -\omega\tau$ не зависит от вида функции $f(\tau)$.

Множитель $e^{-j\omega\tau}$ в выражении (1) определяет только направление лементарных отрезков $f'(\tau)\,d\tau$ в комплексной плоскости, но не их бсолютную величину. Поэтому длина резонансного изображения от ачала до точки, соответствующей моменту t, дана выражением

$$L_d = \int_0^t |f'(\tau)|\,d\tau. \tag{4}$$

тсюда следует теорема о постоянстве длины изображения.

Теорема 2. Мгновенное значение длины изображения $D_\omega(t)$ от ачала до момента t равно сумме абсолютных значений всех приращений (конечных и бесконечно малых) функции $f(\tau)$ в интервале от 0 до и не зависит от частоты интегрирования ω. Полная длина изображения $L_d(\tau_к)$ равна сумме абсолютных значений всех разностей между начениями $f(\tau)$ в соседних экстремумах (включая начало и конец) и не еняется с изменением ω.

Подобным образом можно определить длину и для основного изображения $F_\omega(t)$, только в этом случае будут складываться абсолютные начения элементарных приращений площади между кривой $f(\tau)$ и сью τ:

$$L(t) = \int_0^t |f(\tau)|\,d\tau, \tag{5}$$

ткуда следует

Теорема 3. Мгновенное значение длины изображения $F_\omega(t)$ равно сумме абсолютных значений положительных и отрицательных участков площади между кривой $f(\tau)$, осью τ и ординатами в точках $\tau = 0$ и $\tau = t$.

Радиус кривизны равен отношению бесконечно малого приращения дуги к соответствующему углу между бесконечно близкими касательными. Следовательно, для изображения $D_\omega(t)$ можно написать

$$\rho_d(t) = \frac{|f'(t)|\,d\tau}{d\varphi} = \frac{|f'(t)|\,d\tau}{-\omega d\tau} = -\frac{|f'(t)|}{\omega}, \tag{6}$$

а для изображения $F_\omega(t)$

$$\rho(t) = \frac{|f(t)|\,d\tau}{-\omega d\tau} = -\frac{|f(t)|}{\omega}. \tag{7}$$

Отсюда следует

Теорема 4. Радиус кривизны изображения $D_\omega(t)$ (или $F_\omega(t)$) в точке, соответствующей моменту t, равен значению производной $f'(t)$ (или самой функции $f(t)$), деленному на угловую частоту ω, и не зависит от остальных значений функции $f(\tau)$.

Следствия. Для каждого прямолинейного участка $f(\tau)$ производная $f'(\tau)$ постоянна и поэтому соответствующая часть изображения $D_\omega(t)$ является окружностью радиуса

$$r_d = \frac{f'(t)}{\omega}. \tag{8}$$

Если при этом $f'(\tau) = \infty$, что соответствует скачку функции $f(\tau)$, то и $r_d = \infty$, т. е. скачки функции $f(\tau)$ изображаются прямолинейными участками $D_\omega(t)$. Если же $f'(\tau) = 0$, т. е. $f(\tau)$ на данном участке постоянна, то и $r_d = 0$, т. е. такой участок изображается точкой, и угол между прилегающими касательными пропорционален длительности участка.

В точках экстремумов функции $f(\tau)$ производная $f'(\tau)$ меняет свой знак и в этих точках изображение $D_\omega(t)$ имеет острие, так как здесь направление, в котором нужно откладывать элементарные приращения, меняется на обратное.

Для каждого участка, где $f(\tau)$ постоянна, радиус кривизны изображения $F_\omega(t)$ постоянен и равен

$$r = \frac{f(t)}{\omega}. \tag{9}$$

В точках, где $f(\tau)$ меняет знак, изображение $F_\omega(t)$ имеет острие.

Определим связь между изображениями $D_\omega(t)$ и $F_\omega(t)$. Воспользуемся формулой интегрирования по частям для $F_\omega(t)$:

$$F_\omega(t) = \int_0^t f(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau = \frac{1}{j\omega}\left(\int_0^t f'(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau - f(t)\,e^{-j\omega t}\right)$$

или

$$F_\omega(t) = \frac{1}{j\omega}\left(D_\omega(t) - f(t)\,e^{-j\omega t}\right). \tag{10}$$

Последний член в скобках обозначает, что к изображению $D_\omega(t)$ в точке t нужно в отрицательном направлении прибавить отрезок $f(t)$ под углом $\varphi = -\omega t$. Но под тем же углом откладывается и соответствующий элемент дуги изображения $D_\omega(t)$. Следовательно, отрезок $f(t)$ должен иметь направление касательной к $D_\omega(t)$. Кроме того, приращение длины дуги $D_\omega(t)$ на основании теоремы 2 равно приращению

резка $f(t)$. Следовательно, кривая $D_\omega(t) = f(t)\,e^{-j\omega t}$ получается качением прямой по $D_\omega(t)$, т. е. является эвольвентой по отношению к $D_\omega(t)$. Отсюда следует

Теорема 5. Изображение $F_\omega(t)$ является эвольвентой изображения $D_\omega(t)$, деленной на $j\omega$.

3. ПРИМЕРЫ РЕЗОНАНСНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

На основании доказанных в предыдущем параграфе теорем легко построить резонансные изображения для многих видов $f(\tau)$. Так, например, для прямой $f(\tau) = a\tau$ производная $f'(\tau) = a$ и поэтому $D_\omega(t)$ будет изображаться согласно (8) окружностью радиуса $r_d = a/\omega$ с центром в точке $(0, -a/\omega)$ (рис. 1). На основании (10) $F_\omega(t)$ будет изображать-

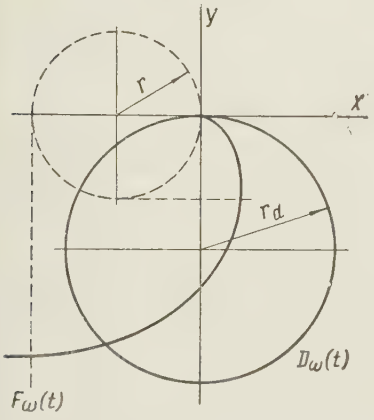


Рис. 1. Преобразованные $D_\omega(t)$ и $F_\omega(t)$ прямой линии $f(\tau) = a\tau$

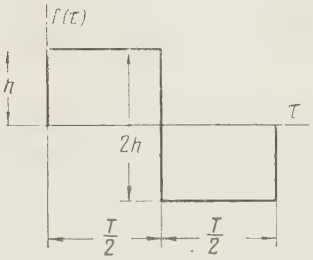


Рис. 2. Функция $f(t)$ в виде одного периода прямоугольных колебаний

ся эвольвентой окружности радиуса $r = a/\omega^2$ с центром в $(-a/\omega^2, 0)$. Для различных значений ω получим семейство окружностей и эвольвент.

Для случая, когда $f(\tau)$ дана одним периодом прямоугольных колебаний (рис. 2), изображения $D_\omega(t)$ (рис. 3) получаются в виде ломаной линии, состоящей из трех отрезков: h, $2h$ и h, а изображения $F_\omega(t)$ — в виде дуг двух окружностей (рис. 4) радиуса $r = h/\omega$, согласно (7). Переходу

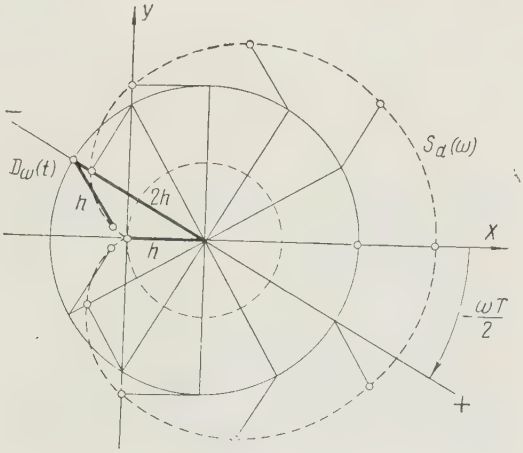


Рис. 3. Семейство преобразованных $D_\omega(t)$ функции $f(\tau)$, изображенной на рис. 2; $S_d(\omega)$ — спектр производной этой функции

$f(\tau)$ от положительных значений к отрицательным соответствует в изображении $F_\omega(t)$ острие, образуемое двумя дугами.

Для пилообразного колебания изображения $D_\omega(t)$ состоят из отрезков прямых (рис. 5), соответствующих скачкам, и из дуг окружностей, соответствующих прямолинейному нарастанию $f(\tau)$. Преобразованная

$F_\omega(t)$ в этом случае изображается дугами эвольвент окружностей. В [1] показано, что изображение $D_\omega(t)$ для $f(\tau) = \sin\omega_1\tau$ является циклоидой (рис. 6) для $\omega = \omega_1$ и гипоциклоидой или эпициклоидой для $\omega \neq \omega_1$.

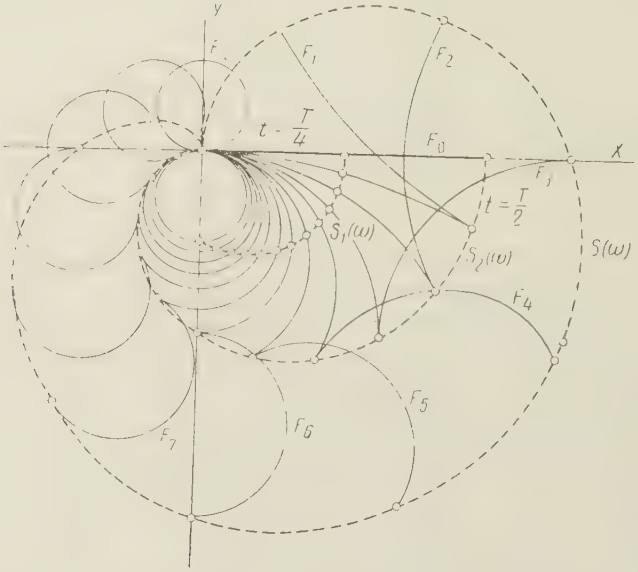


Рис. 4. Семейство преобразованных $F_\omega(t)$ функции $f(\tau)$, изображенной на рис. 2 для $\omega = 0, \Omega/6, \Omega/3, \Omega/2, \ldots, 2\Omega$, где $\Omega = 2\pi/T$ — угловая частота прямоугольных колебаний (рис. 2); $S(\omega)$ — часть комплексного спектра от $\omega = 0$ до $\omega = 2\Omega$; $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$ — кривые текущего спектра для $t = T/4$ и $t = T/2$

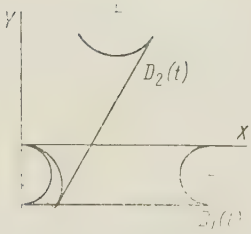


Рис. 5

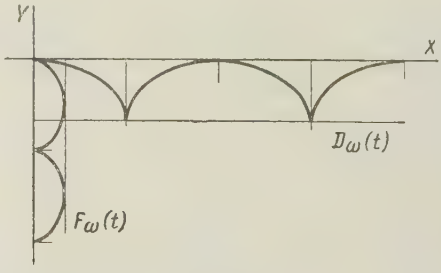


Рис. 6

Рис. 5. Примеры преобразованных $D_\omega(t)$ одного периода пилообразных колебаний
Рис. 6. Циклоиды, изображающие преобразованные $D_\omega(t)$ и $F_\omega(t)$ одного периода синусоидальных колебаний

4. СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕЗАТУХАЮЩИМИ РЕЗОНАНСНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ФУНКЦИИ $f(\tau)$ И ЕЕ СПЕКТРОМ

Принимая во внимание, что (как сказано в § 1) $f(\tau) = 0$ для всех $\tau \leqslant 0$ и всех $\tau \geqslant \tau_к$, мы можем выражения (1) и (2) переписать следующим образом:

$$D_\omega(\tau_к) = \int_0^{\tau_к} f'(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau = S_d(\omega), \qquad (11)$$

$$F_\omega(\tau_к) = \int_0^{\tau_к} f(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau = S(\omega). \qquad (12)$$

о значит, что значения преобразованных $D_\omega(t)$ или $F_\omega(t)$, вычисленные для момента $t = \tau_к$, численно равны спектральной плотности $S_d(\omega)$ производной функции $f'(\tau)$ или спектральной плотности $S(\omega)$ самой функции $f(\tau)$ для данной ω. Значения преобразованных, вычисленные для момента t, дают значения текущей спектральной плотности для этого момента

$$D_\omega(t) = S_{dt}(\omega), \tag{13}$$

$$F_\omega(t) = S_t(\omega). \tag{14}$$

Отсюда следует, что если в семействе кривых (см., например, рис. 3), изображающих преобразованные $D_\omega(t)$ для различных значений ω соединить оконечные точки $D_\omega(\tau_к)$, то получим кривую, изображающую комплексный спектр функции $f'(\tau)$. Если же в семействе $D_\omega(t)$ соединить точки $D_\omega(t)$, соответствующие моменту времени t, то получим кривую текущего спектра для этого же момента t.

Подобным образом, соединяя в семействе кривых $F_\omega(t)$ (например, рис. 4) оконечные точки $F_\omega(\tau_к)$, получим кривую комплексного спектра $S(\omega)$ функции $f(\tau)$, а соединяя точки $F_\omega(t)$, получим значение ее текущего спектра $S_t(\omega)$ для момента t.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ НА ИНДУКТИВНОСТИ И ТОКА В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ РЕЗОНАНСНОМ КОНТУРЕ БЕЗ ПОТЕРЬ ПРИ ПОМОЩИ РЕЗОНАНСНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ $D_\omega(t)$

Общепринято изображать мгновенное значение $a(t)$ гармонически меняющейся величины как проекцию равномерно вращающегося, постоянного по величине вектора амплитуды A. Этот способ представления можно описать следующим образом:

$$a(t) = \mathrm{Re}\, Ae^{j\omega t}. \tag{15}$$

Представление любой переменной величины (и негармонической) как проекции на действительную ось вектора амплитуды переменной величины и фазы не является однозначным. Для однозначности представления нужно ввести какое-нибудь добавочное условие. Таким добавочным условием может быть, например, требование, чтобы тот же вектор представлял своей проекцией на мнимую ось вторую данную переменную величину $b(t)$. Тогда две временные функции, представляющие данные величины $a(t)$ и $b(t)$, однозначно определят временные изменения абсолютной величины и фазы переменного вектора амплитуды. Как показано ниже, определение напряжения на индуктивности $u_2(t)$ и тока $i(t)$ в резонансном контуре (рис. 7) при помощи резонансного преобразования $D_\omega(t)$ дает возможность изобразить ток и напряжение одним вектором, что имеет большие преимущества, между прочим и при конструировании приборов, работающих на принципе резонансных преобразований [1, 2].

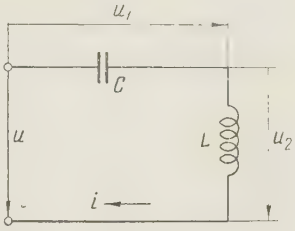


Рис. 7. Контур без потерь с входным напряжением $u = f(\tau)$

Пусть на вход последовательного резонансного контура без потерь (рис. 7) подключено входное напряжение $u = f(\tau)$, численно равное значениям исследуемого процесса. Для нахождения мгновенных значений $u_2(t)$ напряжения на индуктивности воспользуемся интегралом Дюамеля

$$u_2(t) = f(0)\,h(t) + \int_0^t f'(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau, \tag{16}$$

где $h(t)$ — переходная функция; $f(0)$ — значение $f(\tau)$ при $\tau = 0$, которое,

согласно § 1, равно нулю. Переходную функцию для нашего случая можно представить следующим выражением:

$$h(t) = \frac{e^{j\omega_к t} + e^{-j\omega_к t}}{2}. \tag{17}$$

где $\omega_к = 1/\sqrt{LC}$ — собственная частота контура.

Подставляя это выражение в (16), получим

$$u_2(t) = \mathrm{Re}\left[\int_0^t f'(\tau)\, e^{-j\omega_к \tau} d\tau\right] e^{j\omega_к t}. \tag{18}$$

Сравнивая это выражение с (1), мы видим, что величина в скобках представляет мгновенное значение преобразованной $D_\omega(t)$ при $\omega = \omega_к$, так что можно написать

$$u_2(t) = \mathrm{Re}\, D_\omega(t)\, e^{j\omega t}\,|_{\omega=\omega_к}. \tag{19}$$

Сравнивая это выражение с (15), заключаем, что $D_\omega(t)$ можно рассматривать как комплексную переменную амплитуду $U_2(t)$ напряжения на индуктивности:

$$U_2(t) = \int_0^t f'(\tau)\, e^{-j\omega_к \tau} d\tau = D_\omega(t)\,|_{\omega=\omega_к}. \tag{20}$$

Полученное соотношение можно формулировать следующим образом:

Теорема 6. Переменную комплексную амплитуду напряжения на индуктивности в последовательном контуре без потерь, на вход которого подключено напряжение $u = f(\tau)$, можно представить преобразованной $D_\omega(t)$, если положить угловую частоту преобразования равной собственной угловой частоте контура.

Решая интеграл Дюамеля для тока:

$$i(t) = \int_0^t f'(\tau)\, A(t-\tau)\, d\tau,$$

где переходную проводимость $A(t)$ можно представить выражением

$$A(t) = \frac{1}{2j\omega L}\left(e^{j\omega_к t} - e^{-j\omega_к t}\right),$$

получим

$$i(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{j\omega L}\int_0^t f'(\tau)\, e^{-j\omega_к \tau} d\tau\right] e^{j\omega_к t},$$

откуда на основании (1) следует

$$i(t) = \mathrm{Re}\,\frac{D_\omega(t)}{j\omega L}\, e^{j\omega t}\,|_{\omega=\omega_к}. \tag{21}$$

Следовательно, на основании (15) переменная амплитуда тока может быть представлена комплексным вектором

$$I(t) = \frac{1}{j\omega L}\int_0^t f'(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau = \left.\frac{D_\omega(t)}{j\omega L}\right|_{\omega=\omega_к}. \tag{22}$$

Отсюда следует

Теорема 7. Переменную комплексную амплитуду тока в последовательном контуре без потерь, на вход которого подключено напряже-

ле $u = f(\tau)$, можно представить преобразованной $D_\omega(t)$, деленной на ωL, если положить угловую частоту преобразования равной собственной угловой частоте контура.

Следствие. Из (20) и (22) следует

$$\frac{U_2(t)}{I(t)} = j\omega L,$$

е. что отношение переменных амплитуд напряжения на индуктивности и тока, определяемых при помощи преобразования $D_\omega(t)$, является таким же, как и для постоянных амплитуд при установившихся гармонических процессах.

Из (21) следует, что

$$i(t)\,\omega L = \operatorname{Im} D_\omega(t)\, e^{j\omega t}\,|_{\omega=\omega_к}, \qquad (23)$$

т. е. что значения тока (в масштабе, определяемом множителем ωL) могут быть представлены как проекции на мнимую ось вектора $D_\omega(t)e^{j\omega t}$. Сопоставляя этот результат с (19), можем формулировать следующую теорему.

Теорема 8. Значение преобразованной $D_\omega(t)$ определяет полностью состояние колебательного процесса для момента t, так как определяет одновременно и ток и напряжение на индуктивности.

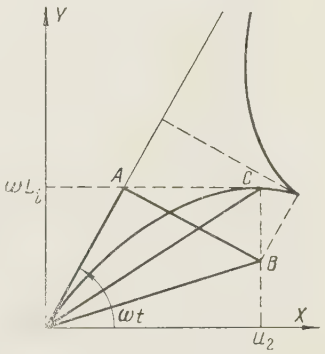


Рис. 8. Представление тока $i(t)$ и напряжения $u_2(t)$ в контуре без потерь при помощи преобразованной $D_\omega(t)$ входного напряжения

В этом отношении метод преобразования $D_\omega(t)$ сходен с методом фазовой плоскости, где положение точки определяет состояние колебательной системы. Однако получаемые изображения существенно различны, и изображение $D_\omega(t)$ более наглядно иллюстрирует влияние приложенного напряжения $u = f(\tau)$.

Необходимо отметить, что обычные общепринятые способы решения переходных процессов не дают явно выраженных значений переменных амплитуд, удовлетворяющих возможности изображения $u_2(t)$ и $i(t)$ одним вращающимся вектором. Так, например, решая операторным методом переходный процесс в незатухающем контуре при включении синусоидального напряжения $u(t) = U \sin \omega t$ для $\omega = \omega_k$, получим выражение для тока

$$i(t) = \frac{U}{2L}\, t \sin \omega t \qquad (24)$$

и для напряжения на индуктивности

$$u_2(t) = \frac{U\omega t}{2} \cos \omega t + \frac{U}{2} \sin \omega t. \qquad (25)$$

Величину $\omega L i(t)$, изображающую в определенном масштабе ток $i(t)$, можно представить как проекцию на ось Y равномерно возрастающего вектора $OA = U\omega t/2$, вращающегося с угловой частотой ω (рис. 8), так как согласно (24)

$$\omega L i(t) = \frac{U\omega t}{2} \sin \omega t.$$

Но проекция вектора OA на ось X определяет только первую часть выражения (25). Вторая часть (25) может быть представлена проекцией вектора $AB = U/2$, перпендикулярного вектору OA, так что напряжение $u_2(t)$ будет выражаться проекцией результирующего вектора OB, а не вектора OA. Очевидно, что единственным вектором, определяющим

одновременно величины $i(t)$ и $u_2(t)$, будет вектор OC, определяемый координатами $u_2(t)$ и $i(t)$. Легко доказать, что именно этот вектор OC определяется резонансным преобразованием $D_\omega(t)$, и точка C принадлежит циклоиде (рис. 6), вращающейся вместе с направлением OA, данным множителем $e^{j\omega t}$.

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННОЙ АМПЛИТУДЫ НАПРЯЖЕНИЯ НА КОНДЕНСАТОРЕ В НЕЗАТУХАЮЩЕМ КОНТУРЕ ПРИ ПОМОЩИ РЕЗОНАНСНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Напряжение на конденсаторе (рис. 7) равно $u_1(t) = f(t) - u_2(t)$, где $f(t)$ — значение $f(\tau)$, т. е. входного напряжения в момент t. Подставляя величину $u_2(t)$ из выражения (18), получим после преобразований

$$U_1(t) = -j\omega F_\omega(t)\Big|_{\omega=\omega_к} = \frac{\omega}{l} F_\omega(t)\Big|_{\omega=\omega_к}, \tag{26}$$

откуда следует

Теорема 9. Амплитуда напряжения на конденсаторе определяется вектором основного резонансного преобразования, помноженного на $-j\omega$ при $\omega = \omega_к$.

7. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЕРЕМЕННЫМИ АМПЛИТУДАМИ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Сравнивая выражения (13) и (20), получим

$$S_d(\omega) = D_\omega(t) = U_2(t)\,|_{\omega_к=\omega}, \tag{27}$$

т. е. что мгновенное значение текущей спектральной плотности производной для момента t_i равно мгновенному значению амплитуды напряжения на индуктивности, определенной преобразованием $D_\omega(t_i)$ при частоте настройки $\omega_к = \omega$.

Спектральная плотность производной для законченного процесса определяется амплитудой незатухающего напряжения $U_2(\tau_к)$ в контуре после окончания процесса.

Сравнивая (14) и (26), получим

$$S_t(\omega) = F_\omega(t) = \frac{j}{\omega} U_1(t)\,|_{\omega_к=\omega}, \tag{28}$$

т. е. мгновенное значение спектральной плотности определяется мгновенным значением амплитуды напряжения на конденсаторе, помноженным на j/ω. Спектральная плотность функции $f(\tau)$ определяется амплитудой незатухающего напряжения $U_1(\tau_к)$ после окончания процесса:

$$S(\omega) = F_\omega(\tau_к) = \frac{j}{\omega} U_1(\tau_к)\,|_{\omega_к=\omega}. \tag{29}$$

8. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ЛАПЛАСА И РЕЗОНАНСНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

Преобразование Лапласа, определяемое выражением

$$f(p) = \int_0^\infty f(\tau)\, e^{-jp\tau} d\tau, \tag{30}$$

преобразовывает функцию времени $f(\tau)$ в функцию $f(p)$. Если в $f(p)$ подставить конкретное значение $p = \alpha + j\omega$, то мы получим соответствующее конкретное значение $f(p)$. Это же самое значение $f(p)$ мы получим, подставив в интеграл (30) данное постоянное значение $p = \alpha + j\omega$:

$$f(p) = \int_0^\infty f(\tau)\, e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{31}$$

и произведя интегрирование способом резонансного преобразования функции $f(\tau)\, e^{-\alpha\tau}$, т. е. путем последовательного откладывания элемен-

рных отрезков $f(\tau)e^{-\alpha\tau}\,d\tau$ в направлениях $-\omega\tau$ и таким образом ре-ая интеграл

$$\int_0^t f(\tau)\,e^{-\alpha\tau}\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

ри постоянном увеличении t. Иными словами, конкретное значение p) можно рассматривать как предел резонансного преобразования нкции $f(\tau)e^{-\alpha\tau}$ при $t\to\infty$.

Легко доказать следующую теорему.

Теорема 10. Значение преобразованной по Лапласу функции для нного $p=\alpha+j\omega$ равно пределу, помноженному на j/ω, к которому ремится при $t\to\infty$ амплитуда напряжения на конденсаторе в конту- без потерь, на вход которого подключено напряжение $u=f(\tau)e^{-\alpha\tau}$ ли пределу амплитуды напряжения на индуктивности, деленному на $j\omega$).

9. ЗАТУХАЮЩИЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Как было показано в предыдущих параграфах, незатухающие резо-нсные преобразования являются решением переходных процессов в нтуре без потерь, на вход которого подключено напряжение $u=f(\tau)$. особ решения переходных процессов при помощи резонансных преобра-ваний можно распространить и на гухающие контуры [1]. Прием реше-я (рис. 9) заключается в том, что из ачений входного напряжения $u=f(\tau)$ читаются значения падения напря-ния на активном сопротивлении. гда можно считать, что на незатуха-ий контур действует входное напря-ние $u_3(t)=f(t)-i(t)r$, и уравнение нимает вид

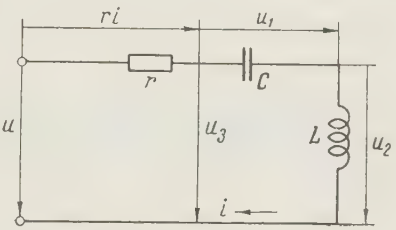


Рис. 9. Контур с активным сопротивлением

$$L\frac{di}{df}+\frac{1}{C}\int_0 idf=f(t)-i(t)r. \quad (32)$$

едовательно, затухающие резонансные преобразования можно предста-ть так:

$$D_{\omega r}(t)=\int_0^t (f(\tau)-ir)'\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau, \quad (33)$$

$$F_{\omega r}(t)=\int_0^t (f(\tau)-ir)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau. \quad (34)$$

ображения $D_{\omega r}(t)$ могут быть легко получены при помощи прибора, исанного в [1]. Сопротивление r можно устанавливать в широких пре-ах на положительные или отрицательные значения, плавно меняя эффициент механической обратной связи в приборе. Прибор можно усо-ршенствовать так, чтобы коэффициент обратной связи автоматически лялся при изменении тока или напряжения на индуктивности. Тогда на ком приборе можно будет определять и некоторые нелинейные контуры.

1. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА РЕЗОНАНСНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Отметим некоторые применения резонансных преобразований. Как ло уже сказано, незатухающие резонансные преобразования имеют са-ю тесную связь со значениями спектральной плотности исследуемого оцесса $f(\tau)$. Поэтому в некоторых случаях метод резонансных преобра-ваний весьма удобен для нахождения спектральных функций и текущего

спектра. Так, например, если $f(\tau)$ состоит из любого ряда прямолинейных участков, то резонансные преобразования, а следовательно, и значения спектральной функции, можно построить при помощи циркуля и простых элементарных вычислений.

В случае, если процесс $f(\tau)$ задан графически (например, как результат измерения), нахождение спектральной функции значительно упрощается при использовании прибора [1], в котором кинематически осуществляется механизация преобразования (1). Кроме этого прибора, который в усовершенствованном виде демонстрировался на выставке в Брюсселе, разработаны принципы и других кинематических приборов для механизации преобразований (1) и (2), позволяющих решать как прямые, так и обратные преобразования Фурье. Кроме того, на основании теорем о постоянстве длины изображения и о радиусе кривизны автором разработана группа приборов, в которых используется аналогия с упругими пластинами [4], ширину которых можно определить (расчетом или при помощи прибора) так, что их линия изгиба будет соответствовать резонансному изображению.

Однако роль резонансных преобразований не ограничивается только тем, что они помогают решать переходные процессы при помощи классического способа Фурье. Незатухающие резонансные преобразования дают непосредственно решение переходного процесса в контуре без потерь, т. е. дают возможность при помощи упомянутого узла прибора [1] решать уравнения вида

$$L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int idt = f(t)$$

с любой правой частью, заданной графически. При помощи этого же прибора можно получить затухающие резонансные преобразования, т. е. определить переходный процесс в контуре с потерями, и решить уравнения типа

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt = f(t).$$

При помощи затухающих резонансных преобразований можно определять переходные процессы и в более сложных цепях, когда переходную характеристику цепи можно представить в виде суммы затухающих колебаний. Тогда результирующий переходный процесс будет являться суммой переходных процессов в нескольких отдельных контурах с затуханием, на вход которых подключен данный процесс $f(\tau)$. Эти отдельные переходные процессы легко получить на приборе, описанном в [1].

Как было уже упомянуто, метод затухающих колебаний можно распространить и на решение некоторых параметрических и нелинейных задач. Намечаются и дальнейшие применения метода резонансных преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Дядьков, Резонансная аналогия, свойства и механизация вычислений преобразований Фурье, Acta technica, 1956, № 6, Nakl. ČSAV Praha.
2. S. Djaďkov, Spekrtálni funkce a resonancni křivky neperiodických jevů, Sbornik praci fakulty electrotechnického inženýrstvi za rok 1956, SNTL, Praha.
3. И. М. Рабинович, Общая прочность и устойчивость сооружений при действии взрывной нагрузки, Сб. статей, вып. I, Государственное издательство строительной литературы, 1944.
4. S. Djaďkov, Resonanz-Transformationen, ihre Analogien und Anwendungen, IV. Internationales Kolloquium an der Hochschule für Elektrotechnik Ilmenau (DDR), 1959.
5. Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, ГИТТЛ 1955.

Поступила в редакцию
13 V 1960

О ПРИБЛИЖЕННОМ РАСЧЕТЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЫСШИХ ТИПОВ ВОЛН В ПОЛОСКОВЫХ ЛИНИЯХ

Г. П. Самуйлов

Рассмотрен метод решения задачи о полосковой линии, основанный на сведении продольного распространения волны к поперечному с последующим применением метода функциональных уравнений. Приведены расчетные и экспериментальные кривые фазовой скорости.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время разрабатываются полосковые линии с волной H_{10}, к как применяющиеся на практике симметричные полосковые линии с электрическим заполнением имеют большие потери (рис. 1, *а*). Фазовая

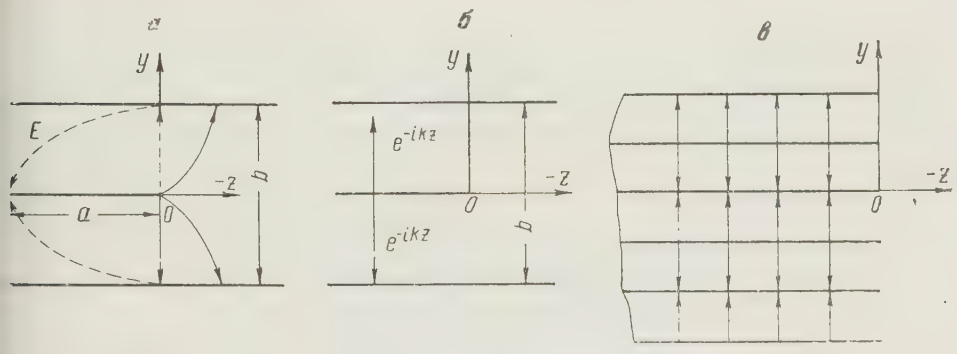


Рис. 1

а - полосковая линия с волной H_{10}; *б*, *в* — к расчету фазовой скорости в полосковой линии с волной H_{10}

орость в такой системе обладает дисперсией. Для вычисления фазовой стоянной h воспользуемся соотношением

$$h = k\sqrt{1-(k_{кр}/k)^2} \quad (k = 2\pi/\lambda). \tag{1}$$

В формуле (1) неизвестно критическое волновое число $k_{кр}$. Для вычисления его целесообразно применить метод, позволяющий свести трехмерную задачу о продольном распространении волны к двумерной задаче поперечном распространении ее. Сущность метода заключается в следующем. Пусть $h = 0$, тогда в продольном направлении распространее отсутствует и в поперечном сечении линии устанавливается стоячая лна (рис. 1, *а*). Эту волну можно представить как результат сложения ух противофазных волн равной амплитуды с волновым числом $k_{кр}$, нагающих на край центральной полуплоскости (рис. 1, *б*). При этом в остранстве ($z < 0$) составляющие поля E_y и H_x ослабляются в силу отивоположной их ориентации, и это ослабление возрастает в направлеи $z < 0$. Составляющая E_z должна удовлетворять на экранирующих оскостях $y = \pm b/2$ нулевым граничным условиям. При этом, если $< \lambda/2$, волна с такими составляющими будет затухающей, и это затухае тем сильнее, чем меньше отношение b/a.

На основании вышеуказанного можно заключить, что излучение в поперечном направлении (в сторону $z < 0$) отсутствует. В силу этого модуль коэффициента отражения волны, отраженной от края центральной полуплоскости, для каждой «парциальной» волны (над полуплоскостью и под ней) равен единице. Таким образом, над полуплоскостью и под ней устанавливается чисто стоячая волна.

В этом случае на некотором расстоянии в плоскости $z = a$ должен быть расположен «первый нуль» электрического поля. Если в плоскости $z = a$ поместить металлическую стенку, то получится цельнометаллическая полосковая линия, в которой распространяется волна H_{10} (рис. 1, *а*). В области $z > 0$ электрическое поле можно представить в виде

$$E_y(z) = A\{e^{-ik_{кр}z} + e^{ik_{кр}z+i\varphi_{00}}\}, \tag{2}$$

где φ_{00} — фаза коэффициента отражения волны, отраженной от края центральной полуплоскости, которая зависит от параметра b/a.

Согласно определению точки $z = a$ можно записать

$$E_y(a) = 2Ae^{i\varphi_{00}/2}\cos\left(k_{кр}a + \frac{\varphi_{00}}{2}\right) = 0, \tag{3}$$

откуда

$$\frac{k_{кр}a}{2\pi} = \frac{a}{\lambda_{кр}} - \frac{\varphi_{00}}{4\pi}. \tag{4}$$

Таким образом, вычислив угол φ_{00} в результате решения двумерной задачи дифракции двух противофазных волн равной амплитуды с волновым числом $k_{кр}$ на краю металлической полуплоскости, расположенной между бесконечными плоскостями, можно найти по формулам (4) и (1) фазовую постоянную волны, которая распространяется в продольном направлении и соответствует решению трехмерной задачи о полосковой линии с волной H_{10}.

Можно показать, что при расстоянии $b > \lambda/2$ «полосковая» волна не локализуется в области $0 < z < a$ и излучается в поперечном направлении в пространство между плоскостями. Такие линии непригодны для передачи энергии СВЧ, и в дальнейшем предполагается $b < \lambda/2$.

1. ОСНОВНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ И МЕТОД РЕШЕНИЯ (ВЫЧИСЛЕНИЕ ФАЗОВОГО УГЛА φ_{00})

Пусть на край полуплоскости набегает волна с волновым числом $k = k_{кр}$ (его в дальнейшем будем обозначать просто k), у которой отличны от нуля лишь две составляющие E_y, H_x.

Подходя к «открытому концу», распространяющаяся волна сохраняет соответствующую ей симметрию распределения тока, поэтому среди отраженных волн присутствуют только волны того же типа.

Осуществим зеркальное изображение относительно бесконечных плоскостей (рис. 1, *в*). Токи на пластинах удовлетворяют условию

$$I_n = -I_{n+1} = -I_{n-1}, \tag{5}$$

а функция распределения тока сохраняется неизменной от пластины к пластине.

В результате несложного преобразования получим интегральное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\int_0^\infty K(z-\zeta)f(\zeta)\,d\zeta = 0 \quad (z > 0), \tag{6}$$

где

$$K(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n H_0^{(1)}\left(k\sqrt{z^2 + (nb)^2}\right). \tag{7}$$

Для решения (3) Л. А. Вайнштейн развил весьма эффективный метод , согласно которому искомая функция f представляется в виде суммы:

$$f(z) = A\{e^{-ikz} + R_{00}e^{ikz} + \sum_{l\neq 0}^{\infty} R_{0l}\, e^{iw_l z}\},$$

$$R_{00} = -\frac{G_2(-k)}{G_2(k)} = -\frac{G_1(k)}{G_2(k)};$$

$$R_{0l} = -\frac{2kG_1(k)}{(w_l^2 - k^2)\, G_2'(k)}; \qquad (8)$$

$$G(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwz}\, K(z)\, dz\, (w^2 - k^2) =$$

$$= (w^2 - k^2)\, G_1(w)\, G_2(w);$$

$$G(w_l) = 0.$$

Полное выражение для тока в [1] включает еще интеграл по вертикальному разрезу.

В данном же случае можно показать, что этот интеграл равен нулю, к как характеризуемые им токи, затекающие на противоположные ороны пластины, взаимно погашаются. Функции $G_1(w)$ и $G_2(w)$ должны быть голоморфны, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях и не иметь там нулей.

Для нахождения функций $G(w)$, применяя теорему Пуассона, преобразуем (4) к следующему виду:

$$K(z) = \frac{bi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi z}{b}\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{kb}{2\pi}\right)^2}}}{\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{kb}{2\pi}\right)^2}}. \qquad (9)$$

В соответствии с (8) функция $G_0(w) = G(w)/(w^2 - k^2)$ представляется идом:

$$G_0(w) = \frac{bi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]^2 - \left(\frac{kb}{2}\right)^2 + \left(\frac{wb}{2}\right)^2}. \qquad (10)$$

Последний легко суммируется при помощи формулы Миттаг — Леффлера:

$$G_0(w) = \frac{1}{v}\,\frac{1 - e^{ivb}}{1 + e^{ivb}}, \qquad (11)$$

е

$$v = \sqrt{k^2 - w^2}.$$

Используя результаты [1], определим функции $G_1(w)$ и $G_2(w)$:

$$G_{1,2}(w) = \sqrt{\frac{-ib\,\mathrm{tg}\,\pi q}{\pi q}}\sqrt{k \pm w}\,\frac{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 \pm \frac{w'}{\delta_m}\right) e^{(\pm\mu_m \mp \mu_{m-1})w'}}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 \pm \frac{w'}{\gamma_m}\right) e^{(\pm\tau_m \mp \tau_{m-1})w'}}, \qquad (12)$$

где

$$q = b/\lambda;$$

$$\gamma_m = \sqrt{q^2 - \left(m - \frac{1}{2}\right)^2} \quad (\operatorname{Im}\gamma_m > 0), \quad m = 1; 2; 3; \ldots;$$

$$q \sin \tau_m = \gamma_m, \quad \tau_0 = \pi/2;$$

$$\delta_m = \sqrt{q^2 - m^2}, \quad m = 1; 2; 3; \ldots; \tag{13}$$

$$q \sin \mu_m = \delta_m, \quad \mu_0 = \pi/2; \quad w' = \frac{w\lambda}{2\pi}.$$

При анализе (10) нетрудно заключить, что условия, которым должны удовлетворять функции $G_{1,2}(w)$, выполняются.

На основании формул (8) и (12) можно найти фазу коэффициента отражения

$$\varphi_{00} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \arcsin \frac{q}{m - \frac{1}{2}} - \arcsin \frac{q}{m} \right\}. \tag{14}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что модуль коэффициента отражения $|R_{00}|$ равен единице; это подтверждает рассуждения во введении.

2. ЗАМЕЧАНИЕ О ХАРАКТЕРЕ ПОЛЯ В ПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ С ВОЛНОЙ H_{10} И ОБСУЖДЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из теории симметричных полосковых линий обычного типа известно, что в области центрального проводника локализуется почти вся энергия СВЧ, передаваемая по полосковой линии.

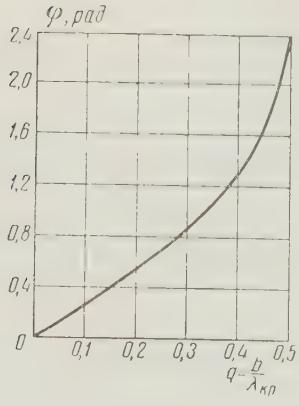


Рис. 2

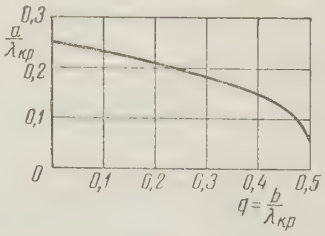


Рис. 3

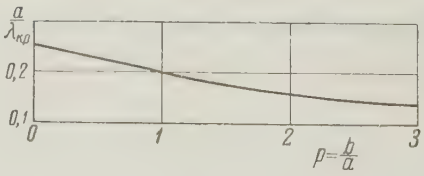


Рис. 4

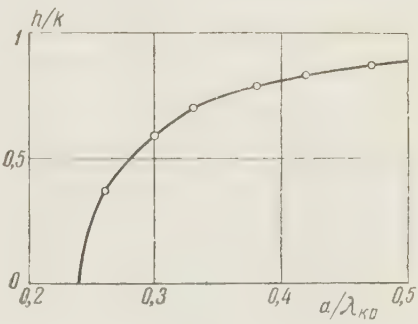
Рис. 2. Фаза коэффициента отражения φ_{00} в зависимости от $q = b/\lambda_{кр}$

Рис. 3. Зависимость критической длины волны от $q = b/\lambda_{кр}$

Рис. 4. Зависимость критической длины волны от $p = b/a$

Поперечное распределение поля в этой области представляет сумму однородного поля и поля, обусловленного влиянием краев центрального проводника. Последнее тем меньше, чем меньше отношение b/a.

Вне области центрального проводника поперечное распределение поля еет чисто затухающий характер, и это затухание возрастает с уменьше-ем b/a. В случае полосковой линии с волной H_{10} можно также показать, э поперечное распределение поля в области $0 < z < a$ состоит из поля лны, которое описывается формулой, аналогичной по существу форму- (2), и из затухающего поля, обусловленного влиянием края полуплос-сти. Величина последнего с возрастанием z убывает тем стрее, чем меньше отношение b/a. оле в области $z < 0$ также являет- затухающим и с возрастанием $|z$ бывает тем быстрее, чем меньше b/a. Приближение настоящего метода ключается в пренебрежении зату-



ис. 5. Относительная фазовая постоян-я в полосковой линии с волной H_{10} и $b/a = 0{,}28$ (точками указаны результаты эксперимента)

ающим полем и определении плоскости $z = a$ нулевого поля E_y только стоячей волне типа (2). Связанная с этим погрешность, по-видимому, ывелика в силу быстрого убывания затухающего поля.

На рис. 2 представлена фаза φ_{00} в зависимости от $q = b/\lambda_{кр}$. При $\ll 1$ фаза коэффициента отражения равна нулю, что соответствует от-ажению от «магнитной стенки». Поле при этом почти полностью ло-ализуется в области центрального проводника. При увеличении q фаза акже увеличивается. Это свидетельствует о том, что поле выходит из бласти, занимаемой «полоской».

На рис. 3 представлена зависимость отношения $a/\lambda_{кр}$ от $b/\lambda_{кр}$ для олны H_{10}. Очевидно, что при малых $b/\lambda_{кр}$ полосковая линия ведет себя ак волновод, у которого одна из стенок магнитная, а другая металлическая. При практических расчетах необходим график зависимости $/\lambda_{кр}$ от b/a (рис. 4). Пользуясь формулой (1), можно вычислить фазовую постоянную в полосковой линии на любой частоте. Приведенные ля иллюстрации расчетные и экспериментальные величины относительо фазовой постоянной h/k, полученные для отношения $b/a = 0.28$ рис. 5), совпадают с высокой точностью.

В заключение автор выражает благодарность П. Г. Треневу за дискуссию при постановке настоящей задачи.

ЛИТЕРАТУРА

. Л. А. Вайнштейн, Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, Изд. Советское радио, 1950.

Поступила в редакцию
23 V 1960

1961 № 4

ВОЛНОВЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ МНОГОПРОВОДНЫХ ЛИНИЙ С КРУГЛЫМИ ПРОВОДНИКАМИ

В. М. Дашенков

Приведены формулы и таблицы для расчета волновых сопротивлений однорядных, многорядных и двумерно-периодических линий с проводниками круглого сечения, расположенными вдоль двух взаимно-перпендикулярных направлений. Знание этих волновых сопротивлений необходимо при исследовании дисперсии и сопротивления связи штыревых замедляющих систем. Вывод формул основан на использовании электростатических потенциальных коэффициентов и проведен для случая, когда расстояния между проводниками значительно больше их радиусов. Предполагается, что формулами можно пользоваться, если отношение диаметра проводников к расстоянию между ними не превышает 0,3.

ВВЕДЕНИЕ

При расчетах штыревых замедляющих структур методом многопроводных линий нужно знать величины, называемые волновыми сопротивлениями многопроводной линии и являющиеся функциями параметров поперечного сечения проводников (штырей) и углов сдвига фаз между ними.

Для различных многопроводных линий с проводниками прямоугольного поперечного сечения расчетные формулы волновых сопротивлений даны в работах [1—5]. Для линий с проводниками круглого сечения соответствующие результаты известны лишь для однорядных систем без боковых стенок из работ [6] (достаточно строгое решение) и [7] (приближенное решение). Однако формулы работы [6] сложны для практического использования.

В данной статье для проводников круглого сечения приведены весьма простые формулы для расчета волновых сопротивлений двумерно-периодических (рис. 1), многорядных (рис. 2, 4) и однорядных многопроводных линий с боковой стенкой и без нее (рис. 3).

1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

На рис. 1 изображено поперечное сечение многорядной (двумерно-периодической) линии с периодами D_z и D_y и радиусами проводников r. Каждому проводнику присвоен двойной номер pq, что указывает на принадлежность проводника к p-му горизонтальному и q-му вертикальному рядам.

Если число рядов по y ограничено, например $p = 0, 1, 2, \ldots, Q-1$, то система называется Q-рядной. В этом случае, как показано в [8], она описывается квадратной матрицей волновых сопротивлений Q-го порядка

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \left\| K_{ik}(\psi) \right\|_{0}^{Q-1},$$

где

$$K_{ii} = \frac{1}{c} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \alpha_{isiq} e^{-j\psi(q-s)}; \qquad (1)$$

$$K_{ik} = \frac{1}{c} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \alpha_{iskq} e^{-j\psi(q-s)} \qquad (2)$$

величины, которые можно назвать соответственно собственным волно-
м сопротивлением i-го ряда и взаимным волновым сопротивлением i-го
-го рядов. В этих формулах c — скорость света в свободном простран-
е; ψ — разность фаз колеба-
й между соседними провод-
ками в направлении z; α_{iskq} и
$_q$ потенциальные коэффициен-
линии, причем s и q — целые
ла, характеризующие номер
тикального ряда. Волновые
противления не зависят от s,
поэтому s может быть любым,
пример $s = 0$.

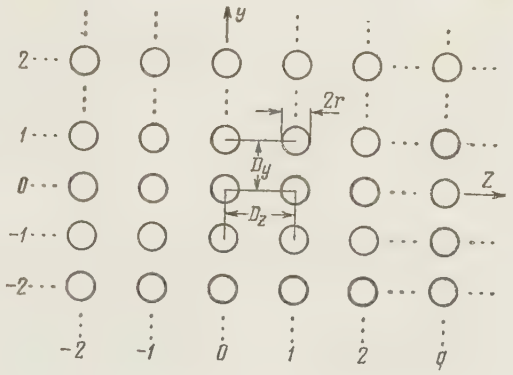


Рис. 1

Частными случаями много-
дной линии без стенок явля-
ся трехрядные и двухрядные
руктуры (рис. 2). Число воз-
жных типов волн, распрост-
няющихся в многорядной ли-
и, равно числу рядов. Каждому типу волн можно соответственно ука-
ть свое волновое сопротивление $K_n(\psi)$ (n — номер волны), являю-
еся корнем характеристического уравнения матрицы $\widetilde{K}$.

В [8] показано, что волновые сопротивления трехрядной линии (рис. 2, *а*) будут

$$(\psi) = K_{00}(\psi) + \frac{1}{2}K_{02}(\psi) + \sqrt{2K_{01}^2(\psi) + \frac{1}{4}K_{02}^2(\psi)} \quad \text{(синфазный тип)}, \tag{3}$$

$$K_2(\psi) = K_{00}(\psi) - K_{02}(\psi), \tag{4}$$

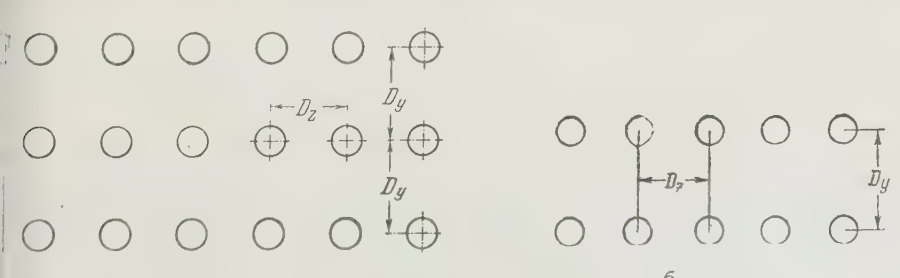
$$(\psi) = K_{00}(\psi) + \frac{1}{2}K_{02}(\psi) - \sqrt{2K_{01}^2(\psi) + \frac{1}{4}K_{02}^2(\psi)} \quad \text{(противофазный тип)} \tag{5}$$

ля двухрядной линии (рис. 2, *б*) получаем

$$K_1(\psi) = K_{00}(\psi) + K_{01}(\psi) \quad \text{(синфазный тип)}, \tag{6}$$

$$K_2(\psi) = K_{00}(\psi) - K_{01}(\psi) \quad \text{(противофазный тип)} \tag{7}$$

следняя формула описывает также волновое сопротивление однорядной системы с боковой стенкой (рис. 3).



а *б*

Рис. 2

Волновое сопротивление двумерно-периодической линии (при числе рядов $Q = \infty$) определяется формулой [8, 9]

$$K(\psi, \theta) = \frac{1}{c} \sum_{q,\, k=-\infty}^{\infty} \alpha_{iskq}\, e^{-j[\psi(q-s)+\theta(k-i)]}, \tag{8}$$

где θ — сдвиг фазы волны между соседними рядами в направлении y. С учетом (1) и (2)

$$K(\psi, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_{ik}(\psi)\, e^{-j\theta(k-i)}. \tag{9}$$

Волновые сопротивления различных типов волн Q-рядной линии, ограниченной металлическими стенками ($y = \text{const}$), расположенными на расстояниях $D_y/2$ от крайних рядов (рис. 4), как показано в [9], равны $K(\psi, \theta)$ при $\theta = n\pi/\theta$, где $n = 1, 2, \ldots, Q$. В силу того что между потенциальными коэффициентами многорядной линии имеют место соотношения

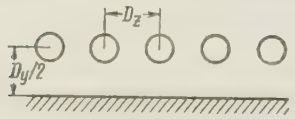


Рис. 3

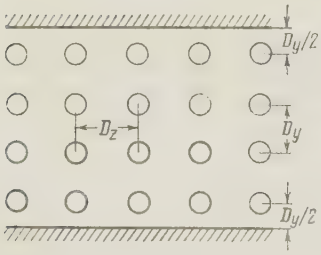


Рис. 4

$$\alpha_{iskq} = \alpha_{iqks} = \alpha_{ksiq} = \alpha_{kqis}, \tag{10}$$

волновые сопротивления (1) и (2) являются четными функциями и удовлетворяют теореме взаимности:

$$K_{ik}(\psi) = K_{ik}(-\psi), \quad K_{ik}(\psi) = K_{ki}(\psi). \tag{11}$$

В свою очередь это означает, что $K_{ik}(\psi)$ — величины действительные. Для двумерно-периодической линии дополнительно к (10) в силу идентичности всех рядов

$$\alpha_{iskq} = \alpha_{i+1,\, sk+1,\, p}\,, \alpha_{0skq} = \alpha_{0s,\,-kq} \tag{12}$$

и поэтому

$$K_{ik}(\psi) = K_{0p}(\psi) = K_{0,\,-p}(\psi) \quad (p = k - i). \tag{13}$$

Принимая во внимание (11) и (13), формулу (9) можно представить в виде

$$K(\psi, \theta) = K_{00}(\psi) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} K_{0p}(\psi) \cos p\theta, \tag{14}$$

причем $K_{00}(\psi)$ и $K_{0p}(\psi)$ с учетом (10) и (12) можно выразить в аналогичной форме:

$$K_{00}(\psi) = \frac{1}{c}(\alpha_{0000} + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{000\,q} \cos q\psi), \tag{15}$$

$$K_{0p}(\psi) = \frac{1}{c}(\alpha_{00\,p\,0} + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{00\,pq} \cos q\,\psi). \tag{16}$$

Заметим, что формулы (14) — (16) являются строгими, коль скоро значения потенциальных коэффициентов определены правильно. Таким образом, центральным местом расчета волновых сопротивлений является выбор, по возможности в удобной форме, того или иного приближения для значения потенциальных коэффициентов.

Расчет величин $K_{00}(\psi)$ и $K_{0p}(\psi)$ мы начнем с преобразования их к

дующему виду:

$$K_{00}(\psi) = \frac{1}{2\sin^2\frac{\psi}{2}\,c}\{(\alpha_{0000} - \alpha_{0001}) - \sum_{q=1}^{\infty}[(\alpha_{000,q-1} - \alpha_{000q}) - (\alpha_{000\,q} - \alpha_{000,\,q+1})]\cos q\psi\}, \tag{17}$$

$$K_{0p}(\psi) = \frac{1}{2\sin^2\frac{\psi}{2}\,c}\{(\alpha_{00\,p0} - \alpha_{00\,p1}) - \sum_{q=1}^{\infty}[(\alpha_{00\,p,\,q-1} - \alpha_{00\,pq}) - (\alpha_{00\,pq} - \alpha_{00\,p,\,q+1})]\cos q\psi\}. \tag{18}$$

гласно определению потенциальных коэффициентов [10] нетрудно деть, что $\frac{1}{c}(\alpha_{0000} - \alpha_{00\,pq})$ — половина волнового сопротивления двух-оводной линии, образованной проводниками 00 и pq (предполагается, что радиусы проводников одинаковы). На величину этого сопротивления, конечно, оказывает влияние и присутствие всех остальных проводников системы, но его можно не принимать во внимание, если $D_z, D_y \gg r$ [10]. Именно этот случай и рассмотрен ниже.

огда

$$\frac{1}{c}(\alpha_{0000} - \alpha_{00\,pq}) = 60\ln\frac{\sqrt{(qD_z)^2 + (pD_y)^2}}{r} \quad 60\ln\frac{D_z}{r}\sqrt{q^2 + p_1^2}\ \text{ом}, \tag{19}$$

е

$$p_1 = \delta p; \qquad \delta = \frac{D_y}{D_z}. \tag{20}$$

Аналогично

$$\frac{1}{c}(\alpha_{00\,pq} - \alpha_{00\,p,q+1}) = \frac{1}{c}(\alpha_{0000} - \alpha_{00\,p,\,q+1}) - \frac{1}{c}(\alpha_{0000} - \alpha_{00\,pq}) =$$

$$60\ln\frac{D_z}{r}\sqrt{p_1^2 + (q+1)^2} - 60\ln\frac{D_z}{r}\sqrt{p_1^2 + q^2} = 30\ln\frac{p_1^2 + (q+1)^2}{p_1^2 + q^2}\ \text{ом}, \tag{21}$$

$$\frac{1}{c}(\alpha_{00\,p,\,q-1} - \alpha_{00\,pq}) = 30\ln\frac{p_1^2 + q^2}{p_1^2 + (q-1)^2}\ \text{ом}, \tag{22}$$

$$\frac{1}{c}(\alpha_{000\,q} - \alpha_{000,\,q+1}) = 60\ln\frac{q+1}{q}\ \text{ом}, \tag{23}$$

$$\frac{1}{c}(\alpha_{000,\,q-1} - \alpha_{000\,q}) = 60\ln\frac{q}{q-1}\ \text{ом}, \tag{24}$$

$$\frac{1}{c}(\alpha_{0000} - \alpha_{0001}) = 60\ln\frac{D_z}{r}\ \text{ом}. \tag{25}$$

вместо (22) можно использовать также формулу

$$\frac{1}{c}(\alpha_{0000} - \alpha_{0001}) = 60\,\mathrm{Arch}\frac{D_z}{2r}\ \text{ом}, \tag{26}$$

праведливую, как известно, при любом D_z/r. Тем самым формулой 26) мы учтем «эффект близости» между соседними проводниками ряда. ; силу сказанного выше, в данном приближении, т. е. при использовании (20)—(26), величина $K_{00}(\psi)$ оказывается равной сопротивлению дного обособленного ряда, а $K_{0p}(\psi)$ — равной взаимному сопротивлению обособленных рядов 0 и p.

2. РАСЧЕТ СОПРОТИВЛЕНИЯ $K_{00}(\psi)$

Подставляя (23), (24) и (26) в (17), получаем

$$K_{00}(\psi) = \frac{60}{2\sin^2\frac{\psi}{2}}\left(2\sin^2\frac{\psi}{2}\,\mathrm{Arch}\,\frac{D_r}{2r} + \cos\psi\ln 2 - \sum_{q=2}^{\infty}\ln\frac{q^2}{q^2-1}\cos q\psi\right) \text{ ом}, \tag{27}$$

Не останавливаясь на промежуточных выкладках, представим $K_{00}(\psi)$ в следующем удобном для практических расчетов виде:

$$K_{00}(\psi) = 60\left[\mathrm{Arch}\,\frac{D_z}{2r} - 1 + S(\psi)\right] \text{ ом}, \tag{28}$$

где

$$S(\psi) = \frac{1}{2\sin^2\frac{\psi}{2}}\left[(1+\ln 2)\cos\psi + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,\frac{\cos\frac{\pi-\psi}{\sqrt{2}}}{\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{q=2}^{\infty}\left(\ln\frac{q^2}{q^2-1} - \frac{1}{q^2-1}\right)\cos q\psi\right] \qquad (0 \leqslant \psi < \pi). \tag{29}$$

В отличие от ряда (27), ряд (29) сходится быстро и удельный вес его членов невелик. Функция $S(\psi)$ легко рассчитывается. Ее значения приведены в табл. 1.

Таблица 1

ψ/π	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$S(\psi)$	∞	9,165	4,174	2,523	1,712	1,241	0,9461	0,7556	0,6358	0,5691	0,5484

Сравнение формулы (28) с соответствующими данными строгого расчета из [6] показывает, что при $\psi \leqslant 0{,}7\,\pi$ формула дает завышенные, а при $\psi > 0{,}7\,\pi$ — заниженные значения $K_{00}(\psi)$. Наибольшая погрешность, наблюдаемая при $\psi \simeq 0{,}3\,\psi$, растет с увеличением $2r/D_z$ и при $2r/D_z = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7$ достигает соответственно 0,3; 5; 10,5 и 33%.

3. РАСЧЕТ СОПРОТИВЛЕНИЯ $K_{0p}(\psi)$

Подстановка (20)—(22) в (18) дает

$$K_{0p}(\psi) = \frac{30}{2\sin^2\frac{\psi}{2}}\left(\ln\frac{1+p_1^2}{p_1^2} + \sum_{q=1}^{\infty}\ln\frac{[p_1^2+(q-1)^2][p_1^2+(q+1)^2]}{(p_1^2+q^2)^2}\cos q\psi\right) \text{ ом}. \tag{30}$$

Данный ряд сходится медленно. Однако если его продифференцировать по p_1, затем произвести подсчет получающихся при этом сумм и результат проинтегрировать, то он заменяется другим весьма быстро сходящимся рядом

$$K_{0p}(\psi) = 60\,\pi\sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-p_1(2\pi q+\psi)}}{2\pi q+\psi} + \frac{e^{-p_1[2\pi(q+1)-\psi]}}{2\pi(q+1)-\psi}\right) \quad (0 < \psi \leqslant \pi), \tag{31}$$

в котором удержание только двух первых членов ($q = 0$ и 1) при $p_1 = \delta p = \frac{D_y}{D_z}\,p \geqslant 0{,}2$ обеспечивает погрешность менее 2% в сравнении с точным значением $K_{0p}(\psi)$. Три члена обеспечивают точность не хуже 3% для $p_1 \geqslant 0{,}1$.

Значения величины $\frac{1}{60}K_{0p}(\psi)$, рассчитанные при помощи (31), приведены в табл. 2.

Таблица 2

δp	ψ/π									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,2	9,721	4,749	3,114	2,314	1,859	1,568	1,384	1,268	1,206	1,190
0,3	9,267	4,314	2,695	1,911	1,463	1,213	1,011	0,9018	0,8416	0,8228
0,4	8,904	3,979	2,384	1,621	1,190	0,9268	0,7612	0,6590	0,6032	0,5858
0,5	8,592	3,702	2,135	1,395	0,9834	0,7368	0,5829	0,5286	0,4375	0,4219
0,6	8,307	3,456	1,924	1,212	0,8229	0,5925	0,4512	0,3662	0,3205	0,3060
0,7	8,027	3,235	1,741	1,059	0,6912	0,4800	0,3519	0,2759	0,2355	0,2229
0,8	7,785	3,029	1,579	0,9272	0,5858	0,3909	0,2759	0,2088	0,1735	0,1621
0,9	7,539	2,845	1,434	0,8143	0,4955	0,3195	0,2172	0,1585	0,1280	0,1186
1,0	7,307	2,670	1,302	0,7160	0,4218	0,2620	0,1716	0,1206	0,09458	0,08635
2,0	5,335	1,423	0,5064	0,2027	0,08635	0,03858	0,01781	$8,657\cdot10^{-3}$	$4,802\cdot10^{-3}$	$3,684\cdot10^{-3}$
3,0	3,897	0,7597	0,1973	0,05769	0,01796	$5,842\cdot10^{-3}$	$1,952\cdot10^{-3}$	$6,760\cdot10^{-4}$	$2,593\cdot10^{-4}$	$1,618\cdot10^{-4}$
4,0	2,847	0,4053	0,07693	0,01643	$3,684\cdot10^{-3}$	$8,876\cdot10^{-4}$	$2,167\cdot10^{-4}$	$5,420\cdot10^{-5}$	$1,457\cdot10^{-5}$	$6,998\cdot10^{-6}$
5,0	2,080	0,2163	0,02998	$4,676\cdot10^{-2}$	$7,780\cdot10^{-4}$	$1,348\cdot10^{-4}$	$2,403\cdot10^{-5}$	$4,429\cdot10^{-6}$	$8,371\cdot10^{-7}$	$3,027\cdot10^{-7}$
6,0	1,519	0,1154	0,01168	$1,330\cdot10^{-3}$	$1,618\cdot10^{-4}$	$2,048\cdot10^{-5}$	$2,668\cdot10^{-6}$	$3,547\cdot10^{-7}$	$4,877\cdot10^{-8}$	$1,309\cdot10^{-8}$
7,0	1,110	0,06158	$4,555\cdot10^{-3}$	$3,790\cdot10^{-4}$	$3,365\cdot10^{-5}$	$3,112\cdot10^{-6}$	$2,960\cdot10^{-7}$	$2,874\cdot10^{-8}$	$2,860\cdot10^{-9}$	$5,636\cdot10^{-10}$
8,0	0,8106	0,03286	$1,755\cdot10^{-3}$	$1,079\cdot10^{-4}$	$6,998\cdot10^{-6}$	$4,728\cdot10^{-8}$	$3,284\cdot10^{-8}$	$2,330\cdot10^{-9}$	$1,688\cdot10^{-10}$	$2,449\cdot10^{-11}$
9,0	0,5921	0,01753	$6,920\cdot10^{-4}$	$3,073\cdot10^{-5}$	$1,455\cdot10^{-6}$	$7,181\cdot10^{-8}$	$3,645\cdot10^{-9}$	$1,888\cdot10^{-10}$	$9,967\cdot10^{-12}$	$1,059\cdot10^{-12}$
10,0	0,4325	$9,354\cdot10^{-3}$	$2,697\cdot10^{-4}$	$8,748\cdot10^{-6}$	$3,027\cdot10^{-7}$	$1,091\cdot10^{-8}$	$4,045\cdot10^{-10}$	$1,531\cdot10^{-11}$	$5,893\cdot10^{-13}$	$4,581\cdot10^{-14}$

4. РАСЧЕТ СОПРОТИВЛЕНИЯ $K(\psi,\theta)$

Формулу (14) с учетом (28) удобно представить в следующем виде:

$$K(\psi, \theta) = 60\left[\operatorname{Arch}\frac{D_z}{2r} - 1 + S(\psi) + S(\delta, \psi, \theta)\right], \tag{32}$$

где

$$S(\delta, \psi, \theta) = \frac{2}{60}\sum_{p=1}^{\infty} K_{0p}(\psi)\cos p\theta. \tag{33}$$

Принимая во внимание (31) и формулу [11]

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt}\cos kx = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t - \cos x} - 1\right) \quad (t > 0),$$

находим

$$S(\delta, \psi, \theta) = \pi\sum_{q=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi q + \psi}\left(\frac{\operatorname{sh}\delta(2\pi q + \psi)}{\operatorname{ch}\delta(2\pi q + \psi) - \cos\theta} - 1\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi(q+1) - \psi}\left(\frac{\operatorname{sh}\delta[2\pi(q+1) - \psi]}{\operatorname{ch}\delta[2\pi(q+1) - \psi] - \cos\theta} - 1\right)\right] \quad (0 < \psi \leqslant \pi). \tag{34}$$

Таблица 3

θ/π	ψ/π										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	∞	63,4	15,6	6,78	3,71	2,30	1,56	1,14	0,895	0,768	0,729
0,1	63,4	31,5	12,4	6,08	3,48	2,21	1,51	1,11	0,880	0,757	0,719
0,2	15,6	12,4	7,66	4,62	2,92	1,96	1,39	1,04	0,836	0,725	0,690
0,3	6,78	6,08	4,62	3,27	2,29	1,64	1,22	0,942	0,771	0,677	0,647
0,4	3,71	3,48	2,92	2,29	1,75	1,34	1,04	0,830	0,695	0,620	0,596
0,5	2,30	2,21	1,96	1,64	1,34	1,08	0,871	0,721	0,619	0,560	0,541
0,6	1,56	1,51	1,39	1,22	1,04	0,871	0,732	0,624	0,548	0,504	0,489
0,7	1,14	1,11	1,04	0,942	0,830	0,721	0,624	0,546	0,490	0,456	0,444
0,8	0,895	0,880	0,836	0,771	0,695	0,619	0,548	0,490	0,447	0,420	0,411
0,9	0,768	0,757	0,725	0,677	0,620	0,560	0,504	0,456	0,420	0,397	0,389
1,0	0,729	0,719	0,690	0,647	0,596	0,541	0,489	0,444	0,411	0,389	0,383

Этот ряд также очень быстро сходится, и для практических расчетов в большинстве случаев достаточно учесть два первых его члена ($q = 0$ и 1).

Численные значения суммы функций $S(\psi) + S(\delta, \psi, \theta)$ для случая $\delta = D_y/D_z = 1$ приведены в табл. 3.

5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ ВОЛНОВЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ПРИ $\psi \ll \pi$, $\psi = 0$ И $\psi = \pi$

Не останавливаясь на математических деталях, укажем, что при $\psi \ll \pi$

$$K_{00}(\psi) = 60\left(\operatorname{Arch}\frac{D_z}{2r} - \ln 2\pi + \frac{\pi}{\psi}\right) \simeq 60\,\frac{\pi}{\psi}. \tag{35}$$

Данный результат вполне оправдан физически, так как известно [12], что при малых ψ любая реальная однорядная линия ведет себя подобно анизотропно проводящей плоскости, значение волнового сопротивления которой и определяется [35].

При $\psi = \pi$

$$K_{00}(\pi) = 60\left(\operatorname{Arch}\frac{D_z}{2r} - \ln\frac{\pi}{2}\right).$$

пользуя вместо (26) формулу (25), получим

$$K_{00}(\pi) = 60\ln\frac{2D_z}{\pi r}, \tag{36}$$

о совпадает с известным выражением для волнового сопротивления ли-и, состоящей из проводника, расположенного в центре между двумя таллическими параллельными плоскостями, расстояние между кото-ми равно D_z [13].

Из (28) получаем при малых ψ

$$K_{0p}(\psi) = 60\left(\frac{\pi}{\psi} - \ln 2\operatorname{sh} p_1\pi\right) \simeq 60\,\pi\left(\frac{1}{\psi} - p_1\right). \tag{37}$$

гсюда ясно видно, что при малых ψ нельзя пренебрегать взаимодей-вием даже между далекими рядами, так как с увеличением p сопро-вление $K_{0p}(\psi)$ уменьшается медленно (см. также табл. 2). В то же ремя

$$K_{0p}(\pi) = 60\ln\operatorname{cth}\frac{p_1\pi}{2}, \tag{38}$$

куда следует, что при $\psi = \pi$ с увеличением p взаимодействие рядов еньшается быстро и, следовательно, в этом случае при расчетах лиянием дальних рядов можно пренебречь (см. табл. 2).

При $\psi \ll \pi$

$$S(\delta, \psi, \theta) = 60\left[-\frac{\pi}{\psi} + \frac{\delta\pi}{2\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{(\delta\psi)^2}{2}} + \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}\left(\frac{\operatorname{sh} 2\pi\delta q}{\operatorname{ch} 2\pi\delta q - \cos\theta} - 1\right)\right]. \tag{39}$$

Подставляя (35) и (39) в (32) и полагая $\psi = 0$, находим

$$K(0, \theta) = 60\left[\operatorname{Arch}\frac{D_z}{2r} - \ln 2\pi + \frac{\delta\pi}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} + \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}\left(\frac{\operatorname{sh} 2\pi\delta q}{\operatorname{ch} 2\pi\delta q - \cos\theta} - 1\right)\right]. \tag{40}$$

Волновое сопротивление однорядной линии с боковой стенкой рис. 3) для $\psi \ll \pi$ и $\psi = 0$ найдем из (7) с учетом (35), (37) и исполь-уя (25):

$$K(0) = 60\ln\frac{D_z \operatorname{sh}\delta\pi}{r\pi}. \tag{41}$$

На основании (7), (36) и (38)

$$K(\pi) = 60\ln\left(\frac{2D_z}{\pi r}\operatorname{th}\frac{\delta\pi}{2}\right). \tag{42}$$

При помощи (41) и (42) можно решить задачу синтеза данной линии, . е. определить ее геометрию по заданным $K(0)$ и $K(\pi)$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{D_z}{r} &= \frac{\pi}{2}\frac{b}{\sqrt{a^2-1}},\\ \frac{D_y}{D_z} &= \delta = \frac{2}{\pi}\operatorname{Arch} a,\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

де

$$a = \exp\frac{K(0) - K(\pi)}{120}; \quad b = \exp\frac{K(0) + K(\pi)}{120}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отсутствие в литературе соответствующих формул не дает возможности оценить предельные геометрические размеры системы, при которых формулы для $K_{0p}(\psi)$ и $K(\psi, \theta)$ еще могут быть использованы. Однако поскольку их вывод и вывод $K_{00}(\psi)$ сделан при одинаковых предположениях, то, вероятно, и пределы применимости их одинаковы. Отсюда представляется, что погрешность формул должна быть не слишком велика (не более 5%) для $2r/D_z$, $2r/D_y \leqslant 0{,}3$. При D_z, $D_y \gg r$ все формулы являются точными.

Автор признателен В. Н. Иванову, указавшему возможность улучшения сходимости ряда (27), и всем участникам радиофизического семинара Саратовского государственного университета, принявшим участие в обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. C. Fletcher, Proc. I. R. E., 1952, **40**, 8, 951.
2. J. C. Walling, J. Electronics and Control, 1957, **3**, 3, 239.
3. Н. Ш. Белуга, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1959, **2**, 1, 84.
4. P. N. Butcher, Proc. I. R. E., p. B., 1957, **104**, 14, 177.
5. В. Н. Иванов, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 2, 224.
6. Chiao-Min-Chy, J. Appl. Phys., 1958, **29**, 1, 88.
7. В. М. Дашенков, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1958, **1**, 5—6, 121.
8. В. М. Дашенков, К теории двумерных штыревых замедляющих систем, Докл. на городск. научн. конференции по радиоэлектронике, Саратов, 15 X 1959.
9. Р. А. Силин, Сб. Электроника, 1958, 2, 3.
10. К. А. Круг, Основы электротехники, ГЭИ, 1952, 316.
11. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, 1951.
12. Лампа с бегущей волной, перев. с англ. под ред. В. Т. Овчарова, Изд. Советское радио, 1952, 39.
13. S. B. Cohn, IRE Trans., 1954, **MTT-2**, 2, 52.

Поступила в редакцию
27 VI 1960

ВЛИЯНИЕ ДВУХ ВИДОВ ПРОДОЛЬНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИИ НА СВОЙСТВА ОДНОЛУЧЕВОГО ПОТОКА ЭЛЕКТРОНОВ

Г. Ф. Филимонов

Исследованы законы сохранения и режим слабых колебаний в потоке электронов, относительно которого известно либо начальное (периодическое в пространстве) распределение электронов и их скоростей по длине пучка, либо граничные (периодические во времени) значения плотности и скорости электронов для всех моментов времени. Найдены пределы применимости уравнений Эйлера для рассмотренных процессов. Произведено сравнение с результатами других авторов.

ВВЕДЕНИЕ

В результате ряда проведенных до настоящего времени исследований, освященных изучению колебаний в однородных односкоростных потоах электронов, можно считать установленным, что при определенных отношениях между параметрами потока электронов в нем возбуждаются есьма интенсивные колебания электронов в направлении их первоначального движения. Известно также, что в процессе роста этих колебаний лоарифмический декремент роста их амплитуд падает до нуля, после чего учок оказывается устойчиво модулированным.

Таким образом, модуляция потока электронов влияет на его дисперионные свойства, изменяя области неустойчивости, существующие в днородных пучках, и обращая их в нуль при некоторой глубине модуяции. С другой стороны, модуляция потока электронов может вызвать оявление в нем новых областей неустойчивости, отсутствующих в первоачально однородном потоке. Поэтому представляет определенный инерес изучение влияния периодической модуляции на дисперсионные войства потока электронов. В последнее время интерес к подобноо рода явлениям особенно возрос вследствие появления ряда прибоов, непосредственно использующих периодически модулированные учки.

Нужно отметить, что опубликованные работы, посвященные рассмотрению вопросов устойчивости периодических пучков (например, [1—4]), одержат серьезные методические недостатки, что делает необходимой трогую проверку применимости полученных в них результатов. С другой тороны, несложный анализ показывает, что разные виды периодической одуляции приводят к существенным различиям в физических свойствах отока электронов, на что в литературе до сих пор не обращалось достаочного внимания.

Проблема влияния внешней модуляции на свойства потока электронов есьма сложна. Наиболее простому аналитическому исследованию в ней оддаются два круга вопросов: законы сохранения и исследование устойивости при помощи линеаризованных уравнений. Настоящая работа освящена рассмотрению этих вопросов для случая одномерного однолуевого потока электронов, модуляция которого строго периодична во вреени или в пространстве.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Ниже мы рассматриваем системы из зарядов одного знака. Если такие системы предоставить самим себе, то заряды в них будут, вообще говоря, расталкиваться, и различные выражения для поля взаимодействующих зарядов будут описывать эффекты расталкивания. Исключение из этого правила могут явиться только те собственные волны системы, фазовые скорости которых близки к скоростям электронов и которые вследствие этого могут оказывать длительное ускоряющее или тормозящее действие на заряды. Такие «резонансно взаимодействующие» с электронами волны целесообразно выделять из полного спектра имеющихся в системе волн, поскольку их действие на потоки зарядов может вызвать эффект группировки зарядов в сгустки, противоположный эффекту расталкивания. Соответственно этому уравнение движения в рассматриваемом случае целесообразно представить в виде

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{e}{m}\{E_0(z,t) + E_\parallel(z,t) + E_\perp(z,t)\}, \tag{1}$$

где z и t — текущие координата и время электронов; e, m — их заряд и масса; $E_\parallel$, $E_\perp$, E_0 — поля расталкивательных сил, резонансной волны и некоторое внешнее поле соответственно. Вторым основным уравнением задачи является уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial j(z,t)}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

связывающее между собой линейный ток и линейную плотность электронов, третьим — уравнение для $E_\parallel$, $E_\perp$, выражающее $E_\parallel$, $E_\perp$ через ρ или j. В случае процесса, строго периодического во времени, $E_\perp$ и $E_\parallel$ определяются равенствами [5,6]

$$E_\perp = \operatorname{Re} E(z)\, e^{-i\omega t},$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + h^2\right) E(z) = -iR_0 \int_0^T \frac{dt}{T}\, j(z,t)\, e^{i\omega t}, \tag{3a}$$

$$E_\parallel = \frac{4\pi}{S}\int_0^T dt'\, j(z,t')\, D(\omega t' - \omega t),$$

$$D(x) = D(x \pm 2\pi) = \frac{\operatorname{sh} p(\pi - x)}{2 \operatorname{sh} p\pi}, \quad 0 < x < 2\pi,$$

где T — временно́й период; $\omega = 2\pi/T$; h — волновое число резонансной волны, соответствующее частоте ω; p^{-1} — эффективный радиус действия расталкивательных сил, значение которого близко к $p^{-1} \simeq \pi \frac{b}{\lambda}\frac{c}{v_0}$ (c — скорость света; $\lambda = cT$; b — радиус пучка; v_0 — средняя за период скорость электронов); S — эффективное поперечное сечение пучка электронов*. Понимая под $t = t(z, t_0)(t(0, t_0) = t_0)$ решение (1), под знаком входящих в (3а) интегралов можно сделать замену

$$j(z,t)\, dt(z,t_0) \to j(0,t_0)\, dt_0, \tag{4a}$$

после чего (1), (3а) образуют замкнутую систему уравнений в переменных Лагранжа z, t_0. Поступающий в прибор ток $j(0, t_0)$ считается известным. Формула (4а) эквивалентна уравнению непрерывности (2).

* Более строгие формулы для вычисления p и S приведены в [6], формулы для вычисления R_0 — в [5].

В случае процесса, строго периодического в пространстве, для $E_\perp$, $E_\parallel$ можно вывести формулы *

$$E_\perp = \operatorname{Re} E(t)\, e^{i\gamma z}, \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) E(t) = iR_0 \int_0^L \frac{dz}{L}\, \rho(z,t) e^{-i\gamma z}, \qquad (3б)$$

$$E_\parallel = \frac{4\pi}{S} \int_0^L dz'\, \rho(z', t)\, D(\gamma z - \gamma z'),$$

налогичные (3а). Здесь L — пространственный период; $\gamma = 2\pi/L$; ω — обственная частота резонансной волны, соответствующая волновому числу γ; $p^{-1} \simeq \pi b/L$. Понимая под $z = z(t, z_0)(z(0, z_0) = z_0)$ решение (1), правых частях (3б) можно сделать равноценную решению (2) замену

$$\rho(z, t)\, dz(t, z_0) \to \rho(z_0, 0)\, dz_0, \qquad (4б)$$

елающую систему (1), (3б) замкнутой, если известна начальная плотность $\rho(z, 0)$.

Рассмотрим теперь содержащиеся в (1) первые интегралы движения для роцессов, строго периодических во времени, и процессов, строго периодических в пространстве. Умножая (1) сначала на $j(z, t)$, а затем на $\rho(z, t)$, олагая $E_0 = 0$ и интегрируя (1) по периоду T для процессов, периодических во времени, получаем

$$\int_0^T \frac{dt}{T} \frac{j(z,t)}{e} \frac{m}{2} \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^{-2} + \frac{d\varphi(z)}{dz} \frac{A^2(z)}{R_0} = \text{const},$$

$$\int_0^T \frac{dt}{T} \frac{j(z,t)}{e} m \left(\frac{dt}{\partial z}\right)^{-1} - \iint_0^T dt\, dt' \frac{j(z,t)\, j(z,t')}{S} D_1(\omega t' - \omega t) -$$

$$- \left[\left(\frac{d^2}{dz^2} + h^2\right) \frac{A^2(z)}{2\omega R_0} - 3 \frac{|E'(z)|^2}{2\omega R_0}\right] = \text{const}, \qquad (5а)$$

$$E(z) = A(z)\, e^{i\varphi(z)},$$

$$D_1(x) = D_1(x \pm 2\pi) = \frac{\operatorname{ch} p(\pi - x) - 1}{2 \operatorname{sh} p\pi p}, \qquad 0 < x < 2\pi.$$

Равенства (5а) в различных приближениях уже не раз приводились в итературе и физический смысл их известен. В отсутствие резонансной олны ($A(z) = E(z) = 0$) они описывают движение электронов в самосогасованном поле расталкивательных сил. Первое и второе равенства (5а) оказывают в этом случае, что средний по периоду поток кинетической нергии электронов остается неизменным, а энергия поля расталкивательных сил растет одновременно с потоком переменной составляющей импульса электронов. Это означает, что раскачка в пучке колебаний конечной нтенсивности является следствием естественного разделения электронов учка на две группы, из которых одна тормозится суммарным расталкивательным полем, а другая — ускоряется. Характерной особенностью таого разделения пучка является сохранение средних по периоду тока см. (2)] электронов и потока их кинетической энергии [см. первое ра-

* При выводе (3б) для $E_\parallel$ приняты предположения об одномерности процесса, рогой периодичности всех величин по z, опущены члены $\sim c^{-2}$. Для точного выления p, входящего в (3б), пригодны все формулы и численные результаты, риведенные в [6], если в них α_k^{-1} заменить на γ.

венство (5а)]

$$\overline{j(z,t)}^{T} = \int_0^T \frac{dt}{T}\, j(z,t) = \text{const},$$

$$\overline{j(z,t)\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^{-2}}^{T} = \int_0^T \frac{dt}{T}\, j(z,t)\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^{-2} = \text{const}. \qquad (6$$

Появление резонансной волны (см. первое равенство (5а)) приводит систематическому торможению (ускорению) всех электронов пучка, сопровождается систематическим убыванием (ростом) потока кинетической энергии электронов и равным ему ростом (убыванием) потока энергии резонансной волны.

Для процессов, периодических в пространстве, вместо (5а) получа равенства ($E_0 = 0$)

$$\int_0^L \frac{dz}{L}\frac{\rho(z,t)}{e} m\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{d\psi}{dt}\frac{A^2(t)}{R_0} = \text{const}, \quad E(t) = A(t)\, e^{-i\psi(t)},$$

$$\int_0^L \frac{dz}{L}\frac{\rho(z,t)}{e}\frac{m}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + \iint_0^L dz\, dz'\frac{\rho(z,t)\,\rho(z',t)}{S} D_1(\gamma z - \gamma z') -$$

$$-\left[\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)\frac{A^2(t)}{2\gamma R_0} - 3\frac{|E'(t)|^2}{2\gamma R_0}\right] = \text{const}, \qquad (5$$

весьма похожие на (5а) и имеющие тот же физический смысл. При $A(t) =$ из них следует, что средний ток электронов сохраняется, а энергия по расталкивательных сил может возрастать только вследствие убыван средней по периоду энергии электронов. Здесь, так же как и в случае пер дических во времени процессов, раскачка колебаний конечной амплиту является следствием разделения первоначального пучка на две груп электронов, движущиеся в противофазе. Однако существование непосре ственного перехода кинетической энергии электронов в энергию поля р талкивательных сил свидетельствует, по-видимому, о возбуждении в п странственно-периодических системах более интенсивных волн простра ственного заряда. Неизменными при пространственно-периодических лебаниях электронов в поле собственных расталкивательных сил остают средний ток [см. первое равенство (5б)] и средняя плотность заряда [(2)]

$$\overline{j(z,t)}^{L} = \int_0^L \frac{dz}{L} j(z,t) = \text{const}, \qquad \overline{\rho(z,t)}^{L} = \int_0^L \frac{dz}{L}\rho(z,t) = \text{const}. \qquad (6$$

Резонансная волна, как и в случае периодических во времени процесс вызывает систематическое изменение скорости электронов и среднего то

При $E_0 \neq 0$ и $E_\perp = 0$ величины $\overline{j(z,t)}^{L}$ и $\overline{j(z,t)\left(\frac{dt}{dz}\right)^{-}}^{T}$ не сохраняют

2. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ

Получение аналитических решений (1) в интересующем нас слу движения электронов в поле собственных расталкивательных сил (E $= E_\perp = 0$) не представляется в настоящее время возможным. Поэтому

же рассмотрены решения линеаризованного уравнения (1) в предельных случаях длинноволновых и коротковолновых возмущений. Линеаризацию (1) произведем, считая параметры модуляции малыми. В операторном виде это равноценно условиям

$$\left|\frac{\partial}{\partial \omega t}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \gamma z}\right| \ll 1$$

Тогда, используя (2) и выражение для тока $j = \rho v$, вместо (1) получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z}\right) j(z, t) - v_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z}\right) \rho(z, t) = \rho_0 \frac{e}{m} E_{\parallel}. \qquad (7)$$

Здесь $v_0 = v_0(z,t)$, $\rho_0 = \rho_0(z, t)$ — некоторые нулевые приближения $v(z, t)$, $\rho(z, t)$, около которых (1) линеаризуется. В общем случае под v_0, ρ_0 следует понимать некоторую бегущую волну или суперпозицию бегущих волн. Легко видеть, что в случае бегущей волны, когда единственным аргументом ρ_0, v_0 является комбинация $\gamma z - \omega t$, линейным преобразованием переменных z, t можно свести ρ_0, v_0 к функции только одной переменной t' или z'. Тогда уравнения (7), (3) дадут (в подвижной системе координат) решение задачи с заданными граничными ($\rho_0 = \rho_0(t')$, $v_0 = v_0(t')$) или с заданными начальными ($\rho_0 = \rho_0(z')$, $v_0 = v_0(z')$) значениями соответственно. Нетрудно видеть, что в силу приближенного характера уравнения (7) эти решения будут справедливы только в пределах ограниченного интервала оси oz или ot, прилегающего (в подвижной системе координат) к точке приложения заданных граничных или начальных значений соответственно *.

Пользуясь близостью искомого решения (7) к постоянному числу (слабая модуляция), можно считать ρ_0, v_0 функцией одной переменной (t или z) и непосредственно в лабораторной системе координат. С математической точки зрения это эквивалентно некоторой перетасовке членов первого (относительно параметра модуляции) порядка малости между решением (7) и его нулевым приближением, а с физической точки зрения такой подход позволяет исследовать влияние заданной в некоторой плоскости $z = 0$ или в некоторый момент времени $t = 0$ модуляции пучка на его устойчивость. Поскольку второй подход к решению (7) приводит к более простым выражениям и оказывается применимым как в случае решения (7), близкого к одной бегущей волне, так и в случае решения, близкого к любой суперпозиции бегущих волн, ниже мы будем считать ρ_0, v_0 функциями только t или z. Нужно, однако, помнить, что получающиеся при этом решения пригодны в различных пространственно-временных областях.

Уравнение (7) даже со сделанными упрощающими предположениями не имеет простого решения в силу интегрального характера поля $E_{\parallel}$ (см (3)). Дальнейшее упрощение (7) можно осуществить в предельных случаях сильной ($p \to \infty$) и слабой ($p \to 0$) экранировок поля пространственного заряда, порожденного данным сечением электронного луча. Случай $p \to \infty$ соответствует тонким пучкам или длинноволновым возмущениям $\left(b \ll \lambda \frac{v_0}{c},\ b \ll L\right)$. Разлагая $E_{\parallel}$ в ряд по степеням p^{-1}, в

---

* Это обстоятельство можно пояснить следующим грубым рассуждением. Строгое решение уравнений (1), (2) ((3а) или (3б)) дается функциями $v = v(z, t)$, $\rho = \rho(z, t)$, определенными на всей плоскости z, t. В процессе линеаризации мы выделяем на плоскости z, t некоторую линию $z = z_0(t)$, на которой функции $v(z_0(t), t) = v_0(z_0(t), t)$, $\rho(z_0(t), t) = \rho_0(z_0(t), t)$ считаем известными, и уравнения (1) — (3) разлагаем по степеням величин $\Delta v = v - v_0$, $\Delta\rho = \rho - \rho_0$, которые считаем малыми. Получающиеся линеаризованные уравнения дают решения, которые приближенно верны лишь вблизи фиксированной линии $z = z_0(t)$. На практике обычно выбирают в качестве такой линии либо ось времени (задача с заданными в $z = z_0 = \text{const}$ граничными значениями v_0, ρ_0), либо ось координат (задача с заданными в момент $t = t_0 = \text{const}$ начальными значениями v_0, ρ_0).

низшем приближении получаем

$$E_{\parallel} = \frac{4\pi}{Sp^2\omega^2}\frac{\partial j(z,\ t)}{\partial t} \qquad j(z,\ t) \equiv j(z,\ t+T), \tag{8}$$

$$E_{\parallel} = -\frac{4\pi}{Sp^2\gamma^2}\frac{\partial \rho(z,\ t)}{\partial z}, \quad \rho(z,\ t) \equiv \rho(z+L,\ t). \tag{8}$$

Случай $p \to 0$ соответствует широким пучкам или коротковолновым возмущениям $\left(b \gg \lambda\frac{v_0}{c},\ b \gg L\right)$. Разложение по степеням p дает в низшем приближении

$$\frac{\partial E_{\parallel}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{S}[j(z,\ t) - \overline{j(z,\ t)}],$$

$$\frac{\partial E_{\parallel}}{\partial z} = \frac{4\pi}{S}[\rho(z,\ t) - \overline{\rho(z,\ t)}].$$

Усреднение в (9) следует производить по периоду $T(L)$, если процесс периодичен во времени (в пространстве).

Выше мы видели, что сохранение средних по периоду значений тока и плотности возможно только при строгой периодичности процессов времени или в пространстве. Поэтому вторые члены равенств (9), приводя к каким-либо осложнениям в случае строго периодических процессов, могут породить самостоятельную ветвь колебаний с собственными областями неустойчивости в случае непериодических (или почти периодических) процессов.

3. ДЛИННОВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Подставляя в этом случае, например, (8б) в (7) и исключая отсюда $\rho(z,\ t)$ при помощи (2), получим для $j(z,\ t)$ уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа. В пространстве характеристик оно записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y}\rho_0^{-1/4}(z)\, j(z,\ t) - j(z,\ t)\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y}\rho_0^{-1/4}(z) = 0, \tag{10}$$

где переменные X, Y связаны с z, t равенствами

$$X = t - \int_0^z \frac{dz}{v_0(z) + \dfrac{\omega_0(z)}{\gamma p}},$$

$$Y = \int_0^z \frac{dz}{v_0(z) - \dfrac{\omega_0(z)}{\gamma p}} - t, \quad \omega_0^2(z) = \frac{4\pi e\rho_0(z)}{mS}. \tag{11}$$

Уравнение (10) решается методом Римана (см., например, [7]). В первом относительно параметра модуляции приближении его решение есть

$$j(z,\ t) = \frac{j_0(z_2) + j_0(z_1)}{2} + \frac{p^2}{1+p^2}\frac{\omega_{00}}{\gamma p}\frac{\rho_0(z_2) - \rho_0(z_1)}{2} + j_{00}\frac{\gamma p}{\omega_{00}}\frac{v_0(z_2) - v_0(z_1)}{2}, \tag{12}$$

где

$$\omega_{00}^2 = \overline{\omega_0^2(z)}^L;\ j_{00} = \overline{j_0(z)}^L;\ \int_{z_1}^{z}\frac{dz}{v_0(z) - \dfrac{\omega_0(z)}{\gamma p}} = \int_{z_2}^{z}\frac{dz}{v_0(z) + \dfrac{\omega_0(z)}{\gamma p}} = t;$$

$z_{1,2}$ легко вычисляются в первом приближении относительно параметра модуляции. Функция Римана оказывается в этом же приближении равной

$$U(X,\ Y;\ \xi,\ \eta) = \rho_0^{-1/4}(z(X+Y))\,\rho_0^{1/4}(z(\xi+\eta))\,\rho_0^{1/4}(z(\xi+Y))\,\rho_0^{1/4}(z(X+\eta))$$

Для процесса, периодического во времени, решение (7) находится ана-

логичным путем и оказывается равным

$$\rho(z,\ t) = \frac{\rho_0(t_1) + \rho_0(t_2)}{2} + \frac{p^2}{1+p^2}\frac{\omega_{00}}{\omega v_{00} p}\frac{j_0(t_1) - j_0(t_2)}{2} - \\ - \frac{\omega\rho_{00}}{\omega_{00}v_{00}}\, p\, \frac{v_0(t_1) - v_0(t_2)}{2}, \tag{13}$$

где

$$\rho_{00} = \overline{\rho_0(t)}^T;\ v_{00} = \overline{v_0(t)}^T;\ \omega_{00}^2 = \overline{\omega_0^2(t)}^T;\ \int\limits_{t_1}^{t} \frac{v_0(t)\,dt}{1 + \frac{\omega_0(t)}{p\omega}} = \int\limits_{t_2}^{t} \frac{v_0(t)\,dt}{1 - \frac{\omega_0(t)}{p\omega}} = z.$$

Если разложить теперь (12), (13) в интеграл Фурье по t и z соответственно, то можно легко убедиться, что все собственные частоты (12) и собственные волновые числа (13) действительны, и решения (12), (13) относятся к классу устойчивых. Однако при $p \to \infty$ их последний член линейно возрастает вместе с p. Представив теперь v_0, ρ_0 в виде

$$v_0 = v_{00}(1 + \alpha\cos\Omega),\ \rho_0 = \rho_{00}(1 + \beta\cos(\Omega + \varphi)), \tag{14}$$

$\Omega = \gamma z$ — для пространственно-периодических процессов; $\Omega = \omega t$ — для временно-периодических процессов, найдем, что каждое из слагаемых (12), (13) носит характер амплитудно-модулированного сигнала с периодом биений

$$\Delta t \simeq \frac{\pi p}{\omega_{00}},\ \Delta z \simeq \frac{\pi p}{\omega_{00}} v_{00}$$

соответственно. Отсюда следует, что амплитуда длинноволновой модуляции в пучке определяется глубиной модуляции скорости и периодом биений и всегда конечна.

4. КОРОТКОВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Этот случай неоднократно рассматривался в литературе (см., например, [1—4]) и сводится к решению системы (7), (9), которую, исключив $j(z,\ t)$ или $\rho(z,\ t)$ из (7) и опустив квадратичные (по параметру модуляции) члены, можно представить в виде одного из следующих уравнений второго порядка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 j(z,t) = -\frac{4\pi e\rho_0}{mSv_0^2}\left[j(z,t) - \overline{j(z,t)}\right], \tag{15а}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \rho(z,t) = -\frac{4\pi e\rho_0}{mS}\left[\rho(z,t) - \overline{\rho(z,t)}\right]. \tag{15б}$$

В [1—4] исследуются условия появления неустойчивости, порожденной периодической во времени внешней силой, действующей в точке $z = 0$. Для этого в [1—4] использовано уравнение (15а) с зависящими от z периодическими коэффициентами. Решение его ищется в виде периодической во времени функции.

Такая постановка задачи ошибочна. Уравнения (15) с зависящими от z коэффициентами получены путем линеаризации (1) около начальных значений ρ, v и дают линейное приближение решения, справедливое лишь в достаточно малом интервале времени. Строго периодическое же во времени решение (1) получается при $t \to \infty$, когда можно совершенно пренебречь влиянием начального распределения. Поэтому найденные в [1—4] собственные волновые числа заведомо реализуются при расплывании локальных неоднородностей (порожденных внешней силой) в пучке электронов с начальным периодическим распределением электронов по длине, но не имеют прямого отношения к декрементам роста периодических возмущений, близких к граничным значениям ρ, v.

Второй недостаток работ [1—4] заключается в том, что решение (15а) ищется путем разложения $j(z, t)$ в интеграл Фурье по переменной t. Для $j(z, \omega)$ получается при этом уравнение Хилла с коэффициентами, зависящими от ω. Поскольку $j(z, t)$ представляется в этом случае контурным интегралом от $j(z, \omega)\, e^{i\omega t}$ в комплексной плоскости, а в литературе в настоящее время нет каких-либо сведений об аналитических свойствах и особенностях решений уравнения Хилла с произвольными комплексными коэффициентами, вычислить этот интеграл сколько-нибудь разумным способом и найти явное выражение $j(z, t)$ с его помощью нельзя.

Чтобы обойти эти трудности, уравнения (15) целесообразно решать непосредственно, записав их в пространстве характеристик. Тогда, используя (15а) и (15б) для описания процессов, периодических во времени и в пространстве соответственно, получаем вместо (15) обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами, которые схематично можно представить в виде

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2} + \Psi(\tau)\right] y(\tau) = 0, \quad \Psi(\tau) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Theta_{|m|} \cos\left(2|m|\tau - \varepsilon_{|m|}\right), \tag{16}$$

где

$$y = j - \bar{j}^T; \quad 2\tau = \omega \frac{t_1 + z_1}{v_{00}} \left(d\tau \equiv \frac{\omega}{2v_{00}}\, dz_1\right); \quad z = z_1;$$

$$\int_0^t r_0(t)\, dt = t_1 + z_1; \quad \Psi(\tau) = \frac{16\pi e \rho_0\left(t\left(\frac{2\tau v_{00}}{\omega}\right)\right) v_{00}^2}{mSv_0^2\left(t\left(\frac{2\tau v_{00}}{\omega}\right)\right)\omega^2} \tag{17а}$$

в случае уравнения (15а) и

$$y = \rho - \bar{\rho}^L; \quad 2\tau = \gamma v_{00}(t_1 + z_1) \left(d\tau \equiv \frac{\gamma v_{00}}{2}\, dt_1\right); \quad t = t_1;$$

$$\int_0^z \frac{dz}{v_0(z)} = t_1 + z_1; \quad \Psi(\tau) = \frac{16\pi e \rho_0\left(z\left(\frac{2\tau}{\gamma v_{00}}\right)\right)}{mS(\gamma v_{00})^2} \tag{17б}$$

в случае уравнения (15б).

Согласно общей теории при Θ_0, близких к квадратам целых чисел ($\Theta_0 \simeq N^2$), решения уравнения (16) неустойчивы и содержат экспоненциальные множители $\exp[\pm \mu_N \tau]$. Ширина области неустойчивости N-го резонанса (т. е. интервал значений $|\Theta_0 - N^2|$, в пределах которого μ_N действительно) и значения μ_N оказываются величинами $\sim \Theta_N$, которые в свою очередь пропорциональны α^N, β^N (см. (14), (16), (17)). Выписывать их для $N > 1$ смысла не имеет, так как весь расчет ведется лишь с точностью до эффектов первого порядка малости. Для $N = 1$

$$\mu_1 = \frac{\Theta_1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\Theta_0 - 1}{\Theta_1}\right)^2} + O(\Theta_1^2). \tag{18}$$

Из (18) видно, что наибольшее значение μ_1 принимает при $\Theta_0 = 1$. При помощи формул (17) можно выписать явные выражения Θ_0, Θ_1 для процессов, периодических во времени (см. (14)):

$$\Theta_0 = \left(\frac{2\omega_{00}}{\omega}\right)^2,$$

$$\Theta_1 = \frac{\Theta_0}{2} \sqrt{\beta^2 + 4\alpha^2 - 4\alpha\beta\cos\varphi}, \tag{19а}$$

и процессов, периодических в пространстве:

$$\Theta_0 = \left(\frac{2\omega_{00}}{\gamma v_{00}}\right)^2, \quad \Theta_1 = \frac{\Theta_0}{2}\beta. \tag{19б}$$

Первая особенность формул (19) заключается в том, что в случае периодических во времени процессов появление неустойчивости определяется параметром внешней силы ω, а в случае процессов, периодических в пространстве, — параметром начального распределения γ. В связи с этим интересно отметить, что в реальных пучках наряду с основными колебаниями, имеющими период T, L, одновременно существуют и все обертоны $T_n = \frac{T}{n}$ ($\omega_n = n\omega$), $L_n = \frac{L}{n}$ ($\gamma_n = n\gamma$). Поскольку декремент роста μ_N максимален для $N = 1$, при соблюдении условия $(2\omega_{00}/\omega_n)^2 \simeq 1$ или $(2\omega_{00}/\gamma_n v_{00})^2 \simeq 1$ в пучке будет нарастать, по-видимому, n-я гармоника колебаний, а не основная.

Другая особенность формул (19) состоит в том, что декремент роста периодических во времени процессов зависит как от глубины модуляции плотности, так и от глубины модуляции скорости, в то время как декремент роста периодических в пространстве процессов определяется только глубиной модуляции плотности.

Весьма интересно рассчитать μ_1 в том случае, когда предварительная модуляция близка к одной из собственных волн потока электронов и величины v_{00}, ρ_{00}, ω, α, β, γ, φ связаны исходными уравнениями (1) — (3). Полагая в (14) $\Omega = \gamma z - \omega t$ и подставляя (14) в (1) — (3), с точностью до эффектов первого порядка малости находим

$$\varphi = \pi m,\ \beta = \alpha \frac{\gamma v_{00}}{\omega_{00}} \sqrt{1 + p^2},\ \omega = \gamma v_{00} + \omega_{00} \frac{(-1)^m}{\sqrt{1 + p^2}}. \qquad (20)$$

Если учесть, что в рассматриваемом случае $p \to 0$, $\Theta_0 \simeq 1$, то окажется, что для периодического во времени процесса максимальный декремент роста ($\Theta_0 = 1$) быстрой волны ($m = 1$) равен $\mu_1 = 5\alpha/4$ и в 5 раз превышает декремент роста медленной волны, если у них одинаковы параметры модуляции скорости. Если же у них одинаковы параметры модуляции плотности, то максимальный декремент роста быстрой волны равен $\mu_1 = 5\beta/12$ и лишь в 1,66... раза превышает декремент роста медленной волны.

В случае процессов, периодических в пространстве, максимальный декремент роста быстрой волны равен декременту роста медленной волны, если у них одинаковы параметры модуляции плотности, и в 3 раза превышает максимальный декремент роста медленной волны (равный $\mu_1 = \alpha/4$) в случае одинаковых модуляций скорости.

Сравнение формул (18), (19а, б) с аналогичными результатами работ [1—4] удобнее всего осуществить на примере работы [2]. Формула (21) [2] дает для декремента пространственного роста выражение (18) со следующими значениями коэффициентов Θ_0, Θ_1 (в обозначениях [2] c_0, c_1)

$$\Theta_0 = \left(\frac{2\omega_{00}}{\gamma v_{00}}\right)^2, \quad \Theta_1 = \alpha(3 - \Theta_0). \qquad (19в)$$

В [2] рассмотрен случай $j_0(z) = \text{const}$, т. е. $\alpha = \beta$, $\varphi = \pi$. Из формул (19) видно, что найденные в [2] области раскачки периодических во времени колебаний, порожденных периодической во времени внешней силой, включенной в момент времени $t = 0$, когда пучок имел пространственно-периодическую структуру, определяются параметром γ, совпадают с областями неустойчивости пространственно-периодического потока, существующими и в отсутствие внешней силы, и не имеют ничего общего с областями неустойчивости периодического во времени пучка, которые определяются параметром внешней силы ω. Численные значения μ_1, даваемые формулами (18), (19в), также не совпадают со значениями μ_1, определяемыми (18), (19 а, б).

Отсюда следует, что исследованный в [1—4] тип неустойчивости реализуется при строгой пространственной или временной периодичности колебаний электронов в пучке, как это и можно было предположить с самого начала. Общее решение уравнения (16) имеет вид

$$y(\tau) = y(\tau_0)\frac{y_1(\tau)\,y_2'(\tau_0) - y_2(\tau)\,y_1'(\tau_0)}{y_1(\tau_0)\,y_2'(\tau_0) - y_2(\tau_0)\,y_1'(\tau_0)} + y'(\tau_0)\frac{y_1(\tau_0)\,y_2(\tau) - y_1(\tau)\,y_2(\tau_0)}{y_1(\tau_0)\,y_2'(\tau_0) - y_2(\tau_0)\,y_1'(\tau_0)}, \quad (2$$

где $\tau_0 = \omega t_1/2v_{00}$ в случае (17а) и $\tau_0 = \gamma v_{00} z/2$ в случае (17б). Частные решения $y_{1,2}(\tau)$ удобно представить в виде рядов по степеням малых параметров α, β. Поскольку $y(\tau_0)$, $y'(\tau_0)$ — величины первого порядка малости (см. (17а, б)), для $y_k(\tau)$ следует взять нулевое по степеням α, β приближение. Можно показать, что при $|\sqrt{\Theta_0} - m| \gg \Theta_1$, $\pm m = 0, 1, 2, \ldots$ нулевые приближения устойчивых частных решений (16) в пределах области абсолютной сходимости, определяемой неравенством *

$$\left|\frac{\Theta_1}{4(N-\sqrt{\Theta_0})}\left[\frac{2N+2+N(N-\sqrt{\Theta_0})}{(N+2)(\sqrt{\Theta_0}+1)} + \frac{2N-2-N(N-\sqrt{\Theta_0})}{(N-2)(\sqrt{\Theta_0}-1)}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{1+\frac{N-2{,}5}{|N-2{,}5|}}{2}\right] + O(\Theta_1^2)\right| < 1, \quad (22$$

равны

$$y_1 = \sin\sqrt{\Theta_0}\,\tau, \quad y_2 = \cos\sqrt{\Theta_0}\,\tau. \quad (2$$

Соответствующие решения (16) имеют вид

$$j(z,\ t) - j_{00} = \left[j_0\left(t - \frac{z}{v_{00}}\right) - j_{00}\right]\cos\frac{\omega_{00}z}{v_{00}} + \rho_{00}\frac{\partial v_0\left(t - \frac{z}{v_{00}}\right)}{\partial t}\frac{\sin\frac{\omega_{00}z}{v_{00}}}{\omega_{00}}, \quad (24$$

$$\rho(z,\ t) - \rho_{00} = [\rho_0(z - v_{00}t) - \rho_{00}]\cos\omega_{00}t - \rho_{00}\frac{\partial v_0(z - v_{00}t)}{\partial z}\frac{\sin\omega_{00}t}{\omega_{00}} \quad (24б)$$

для процессов, периодических во времени (24а), и процессов, периодических в пространстве (24б).

Принимая во внимание, что в первом приближении неустойчивого решения следует считать $e^{-\mu_1\tau} = 1$, можно показать, что оно в точности совпадает с (24), если в (24) учесть равенство $\theta_0 = 1$.

Формула (24а) получена при тех же предположениях, что и (22) [8], и имеет принципиально ту же область применимости. Подставляя, однако, (24а) в (1), решая (1) приближенно и сравнивая получающийся результат

$$t = t_0 + \frac{z}{v_{00}} + \frac{\alpha\sin\omega t_0 + \beta\sin(\omega t_0 + \varphi)}{\omega}\left(1 - \cos\frac{\omega_{00}z}{v_{00}}\right) - \frac{\alpha}{\omega_{00}}\cos\omega t_0\sin\frac{\omega_{00}z}{v_{00}} \quad (25$$

с (22) [8], находим, что (25а) не совпадает с (22) [8] в пределах первого порядка малости. Это расхождение вызвано, по-видимому, тем, что при выводе основного уравнения (18) [8] делается замена $v^2 \to v_{00}^2$, имеющая неконтролируемые последствия.

5. ПРИМЕНИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

Основное линеаризованное уравнение (7) записано в форме Эйлера и справедливо в тех пространственно-временных областях, где поле скоростей однозначно, непрерывно и дифференцируемо. Поскольку эти условия нарушаются при обгоне электронами друг друга, уравнения Эйлера сле-

* По порядку величины условие (22) эквивалентно $\alpha,\ \beta < \frac{\text{const}}{\sqrt{\Theta_0}}$.

дует считать применимыми только в отсутствие обгона. Формула (25) позволяет оценить область изменения параметров, в пределах которой обгоном можно пренебречь.

Эффект обгона заключается в том (см., например, (25)), что одним и тем же t, z соответствуют несколько значений t_0. Поэтому значения z, при которых обгон наступает, можно найти из уравнения

$$\frac{\partial t(z, t_0)}{\partial t_0} = 0 \tag{26}$$

в случае процессов, периодических во времени. Выбирая t_0 таким образом, чтобы корень (26) был минимальным, мы получим точку первого обгона. Требуя, чтобы характеристические масштабы решения (24а), равные $2\pi v_{00}/|\omega \pm \omega_{00}|$, не превышали $z_{\text{обг}}$, находим следующие условия применимости уравнений Эйлера:

$$\omega_{00} > \alpha\omega;\ \omega_{00} < \alpha\omega,$$

$$z_{\text{обг}} = \frac{v_{00}}{\omega_{00}} \arcsin \frac{\omega_{00}}{\alpha\omega} > \frac{2\pi v_{00}}{|\omega \pm \omega_{00}|} \tag{27а}$$

в случае периодических во времени процессов. При $\omega_{00} > \alpha\omega$ уравнение (26) решений не имеет (т. е. обгон отсутствует).

Повторяя проведенные выше рассуждения, можно показать, что периодические в пространстве процессы описываются уравнениями Эйлера при соблюдении условий

$$\omega_{00} > \alpha\gamma v_{00};\quad \omega_{00} < \alpha\omega,$$

$$t_{\text{обг}} = \frac{1}{\omega_{00}} \arcsin \frac{\omega_{00}}{\alpha\gamma v_{00}} > \frac{2\pi}{|\omega \pm \omega_{00}|}. \tag{27б}$$

Из (27) видно, что колебания без обгона происходят только в достаточно плотных пучках электронов. При малой плотности пренебречь обгоном можно только при достаточно малой глубине модуляции скорости (вторые неравенства (27а, б) по порядку величины равноценны $\alpha < 1/2\pi$). В литературе, посвященной теории клистронов ($\beta = 0$), уже приводились выражения для $z_{\text{обг}}$. Интересно отметить, что модуляция плотности пучка вызывает сдвиг точки первого обгона лишь на бесконечно малую величину первого порядка малости.

В случае неустойчивых колебаний критерий применимости уравнений Эйлера не имеет вида (27). Однако его обоснованный вывод требует решения нелинейных уравнений, учитывающих эффекты второго порядка малости.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. E. H. Rydbeck, B. Agdur, Ondeé lectr., 1954, **34**, 499.
2. П. В. Блиох, Я. Б. Файнберг, ЖТФ, 1956, **26**, 530.
3. Ю. Ф. Филиппов, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 2, 228.
4. В. А. Солнцев, А. С. Тагер, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 10, 1652.
5. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 1953, **23**, 654.
6. Г. Ф. Филимонов, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 3, 489.
7. Ф. Трикоми, Лекции по уравнениям в частных производных, ИЛ, 1957.
8. В. Я. Савельев, ЖТФ, 1940, **10**, 1365.

Поступила в редакцию
29 VI 1960

К ТЕОРИИ ДИОДНЫХ СВЧ-ГЕНЕРАТОРОВ

В. А. Малышев

В рамках кинематического приближения изложена теория диодных СВЧ-генераторов и дан анализ их работы. Проведено теоретическое сравнение диодных генераторов и отражательных клистронов по выходным параметрам.

1. ВВЕДЕНИЕ. ЭЛЕКТРОННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Опубликованные в литературе сведения по теории диодных генераторов [1, 2, 3, 4] ограничиваются изучением физики процессов в диоде и почти не затрагивают особенностей работы таких приборов и их расчета.

Рассмотрение именно этих вопросов вызвано определенным интересом, проявившимся в последнее время к генераторам диодного типа, в частности к генераторам с тормозящим полем [5, 6, 7].

В данной статье изложена попытка анализа работы диодных генераторов в приближении малых амплитуд и при пренебрежении влиянием пространственного заряда на процессы группирования.

Уравнение движения электрона, входящего в пространство группирования, в котором действуют постоянное (E_0) и переменное электрические поля,

$$\frac{m}{\varepsilon}\ddot{x} = E_0 + E_1 \sin \omega t \qquad (1)$$

при начальных условиях $t = \tau$; $x = 0$; $\dot{x} = v_0 = \sqrt{2\frac{\varepsilon}{m}U_0}$ имеет решение

$$x = \left[\frac{\varepsilon}{m}\frac{E_0}{2}(t-\tau)^2 + v_0(t-\tau)\right] + \frac{\varepsilon E_1}{m\omega^2}[\omega(t-\tau)\cos\omega\tau - \sin\omega t + \sin\omega\tau]. \qquad (2)$$

Первый член справа в соотношении (2) можно выразить как $(t-\tau)\bar{v}$, где средняя скорость для случая движения до полной остановки в тормозящем поле $\bar{v} = v_0/2$, а для случая ускоренного движения

$$\bar{v} = \frac{v_0}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{U_2}{U_0}}\right), \qquad (3)$$

причем U_2 и U_0 — потенциалы электродов, образующих пространство группирования. Из выражения (2) можно получить

$$\varphi_0 = \varphi - \mu A \sin(\varphi - \psi - \theta), \qquad (4)$$

где

$$\varphi = \omega(t-\tau);\ \varphi_0 = \frac{\omega x}{\bar{v}};\ \psi = \omega t;\ \mu = \frac{\varepsilon E_1}{m\omega\bar{v}^2};$$

$$A = \sqrt{(\varphi - \sin\varphi)^2 + (1-\cos\varphi)^2};\ \operatorname{tg}\theta = \frac{\varphi - \sin\varphi}{1-\cos\varphi}.$$

Для отыскания тока в точке с координатой x: $i = I_0\left(1 - \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)$ необходимо найти зависимость $\varphi = f(\varphi_0, \psi)$. Эту зависимость можно определить из (4) в случае приближения малого сигнала, когда $\mu \ll 1$. При

этом в выражении для A можно без большой погрешности вместо φ подставить φ_0. Кроме того, угол θ меняется при изменении φ значительно медленнее, чем стоящий в сумме с ним угол φ, так что в выражении для θ также можно заменить φ на φ_0 (можно показать, что в наиболее интересных участках изменения $2\pi < \varphi < 3\pi$ угол θ меняется менее чем на 7% от изменения φ). После таких замен выражение (4) приобретает вид уравнения Кеплера относительно φ, решение которого будет [8]

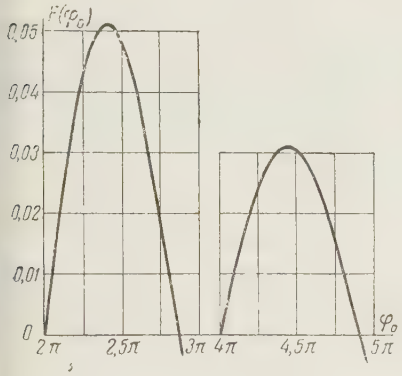


Рис. 1

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(n\mu A) \sin[n(\varphi_0 - \psi - \theta)], \quad (5)$$

откуда для тока получается соотношение

$$i = I_0 \left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(n\mu A) \times \right.$$

$$\left. \times \sin\left[\frac{\pi}{2} + n(\psi - \varphi_0 + \theta)\right]\right\}, \quad (6)$$

из которого легко найти первую гармонику тока.

Следует заметить, что к формуле (6) можно прийти также путем разложения φ в выражении (4) в ряд по степеням μ с последующим отысканием тока в виде ряда Фурье [2, 3, 4].

Мощность взаимодействия потока с полем (P), связанная с электронной проводимостью участка взаимодействия (Y_e) соотношением $2P = Y_e U^2$ (где U — амплитуда напряжения на электродах: $U = E_1 d$), можно найти из выражения

$$P = \frac{1}{2}\int_0^l iE^* dx = \frac{1}{2}\frac{\bar{v}}{\omega}\int_0^{\varphi_0} iE^* d\varphi_0. \quad (7)$$

При этом для Y_e получается формула:

$$Y_e = \frac{2\bar{v}I_0}{\omega U d} e^{j\frac{\pi}{2}} \int_0^{\varphi_0} J_1(\mu A)\, e^{j(\theta-\varphi_0)}\, d\varphi_0, \quad (8)$$

причем $A = \sqrt{p^2 + q^2}$; $\operatorname{tg}\theta = p/q$; $p = \varphi_0 - \sin\varphi_0$; $q = 1 - \cos\varphi_0$. Точное вычисление интеграла в (8) не представляется возможным. Поэтому, разложив функцию Бесселя в ряд и ограничиваясь двумя членами ряда, можно получить

$$Y_e = \frac{2\bar{v}I_0}{\omega U d} e^{j\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{I\mu}{2} e^{j\gamma} - \frac{\mu^3}{16}\int_0^{\varphi_0} (p^2 + q^2)[f(\varphi_0) + j\lambda(\varphi_0)]\, d\varphi_0\right\}, \quad (9)$$

где

$$L = \left\{\left[\int_0^{\varphi_0} f(\varphi_0)\, d\varphi_0\right]^2 + \left[\int_0^{\varphi_0} \lambda(\varphi_0)\, d\varphi_0\right]^2\right\}^{1/2}; \quad \gamma = \operatorname{arc\,tg} \frac{\int_0^{\varphi_0} \lambda(\varphi_0)\, d\varphi_0}{\int_0^{\varphi_0} f(\varphi_0)\, d\varphi_0};$$

$$f(\varphi_0) = \cos\varphi_0 - 1 + \varphi_0 \sin\varphi_0;$$

$$\lambda(\varphi_0) = \varphi_0 \cos\varphi_0 - \sin\varphi_0.$$

Для вычисления интеграла в выражении (9) воспользуемся теоремой о среднем и вынесем $p^2 + q^2$ за знак интеграла, взяв значение φ_0 в этой величине, равным среднему $\overline{\varphi_0}$ (связь между φ_0 и $\overline{\varphi_0}$ найдем позднее). При этом получается

$$Y_e = \frac{2I_0\bar{v}L}{\omega U d\overline{A}} e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)}\left[\frac{X}{2} - \frac{X^3}{16}\right] \simeq \frac{2I_0\bar{v}L}{\omega U d\overline{A}} J_1(X)\, e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)}, \qquad (10)$$

где $X = \mu\overline{A}$; $\overline{A} = \sqrt{\overline{p^2} + \overline{q^2}}$, причем черточки над p, q, A указывают на усредненность. В выражении (10) функция Бесселя появилась из-за замены двух членов, представляющих члены ее разложения в ряд. Можно показать, что если бы при получении (9) из (8) функция Бесселя была заменена большим числом членов ряда, то все эти члены при изложенном процессе усреднения появились бы в выражении (10), давая ряд, представляющий функцию Бесселя.

Окончательное выражение для Y_e после интегрирования и подстановок имеет вид

$$Y_e = 2G_0 \frac{J_1(X)}{X} e^{-j(\delta+\pi)}, \qquad (11)$$

где

$$G_0 = \frac{I_0}{U_0 B^2} N(\varphi_0);$$

$$X = \frac{UM(\varphi_0)}{2U_0 B_0^2}; \qquad M(\varphi_0) = \frac{\overline{A}}{\varphi_0};$$

$$N(\varphi_0) = \frac{1}{\varphi_0}\left[\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\frac{\varphi_0}{2}} - \cos\frac{\varphi_0}{2}\right]; \quad \delta = -\frac{3\pi}{2} + \frac{\varphi_0}{2},$$

причем величины B, B_0 и φ_0 для разных типов генераторов имеют значения: $B = B_0 = 1$, $\varphi_0 = \omega d/v_0$ — для генераторов типа монотрона, у которых в пространстве группирования отсутствует постоянное поле; $B = B_0 = (\sqrt{U_0} + \sqrt{U_2})/2\sqrt{U_0}$, $\varphi_0 = 2\omega d\sqrt{U_0}/v_0(\sqrt{U_0} + \sqrt{U_2})$ — для генераторов с ускоряющим полем в области группирования; в случае, если эта область начинается у катода: $B = B_0 = 1/2$, $\varphi_0 = \omega d\sqrt{2\frac{m}{\varepsilon U_2}}$ (причем в выражениях (11) вместо U_0 следует везде писать U_2); проводимое рассмотрение справедливо для этого случая только при условии работы диода в режиме насыщения. Наконец, для случая тормозящего поля

$$2B_0^2 = B = \frac{U_0 - U_2}{4U_0}, \qquad \varphi_0 = \frac{4\omega d U_0}{v_0(U_0 - U_2)}.$$

Генерация происходит в областях, где $N(\varphi_0)\cos\delta > 0$, и так как $\cos\delta = -\sin\frac{\varphi_0}{2}$, то условием возможности генерации служит выполнение неравенства

$$F(\varphi_0) = N(\varphi_0)\cos\delta = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0} - \left(\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2\right] > 0. \qquad (11а)$$

График зависимости $N(\varphi_0)\cos\delta = F(\varphi_0)$ для первых двух зон генерации представлен на рис. 1. Из него следует, что генерация возможна при $2\pi < \varphi_0 < 2{,}86\ \pi$; $4\pi < \varphi_0 < 4{,}92\ \pi$; ....

В этих пределах изменения φ_0 результат проведенного выше усреднения должен давать наименьшую погрешность. Это позволяет выбрать связь между величинами φ_0 и $\bar{\varphi}_0$. Результатом такого выбора является $\bar{\varphi}_0 = \varphi_0$ для первой и второй зон генерации. Можно показать, что при этом функция $M(\varphi_0)$ определяется формулой:

$$M(\varphi_0) = \sqrt{1 + \frac{2}{\varphi_0^2}(1 - \cos\varphi_0 - \varphi_0 \sin\varphi_0)}. \tag{12}$$

Вследствие того, что при усреднении величины $p^2 + q^2$ по разным функциям $f(\varphi_0)$ и $\lambda(\varphi_0)$ было взято в этой величине одно и то же значение φ_0, результаты такого усреднения могут давать значительные погрешности. Для оценки последних можно вычислить правую часть выражения (9) более точно, ограничив разложение функции Бесселя двумя членами ряда (что достаточно справедливо при $\mu\bar{A} < 3$). При этом

$$Y_e = \frac{2I_0\bar{v}L}{\omega U d\bar{A}} e^{j\frac{\pi}{2}} [X_0 e^{j\gamma} - X_0^3 (a\cos\gamma + jb\sin\gamma)] =$$

$$= \frac{2I_0\bar{v}L}{\omega U d\bar{A}} e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} \left(X_0 - \frac{X_0^3}{2}\right)\left(\frac{1 - aX_0^2}{1 - \frac{X_0^2}{2}}\right) \times$$

$$\times \sqrt{1 + 2(a-b)\frac{1 - (a+b)\frac{X_0^2}{2}}{(1 - aX_0^2)^2} X_0^2 \sin^2\gamma}, \tag{13}$$

где

$$X_0 = \frac{\mu\bar{A}}{2} = \frac{X}{2};$$

$$a = \frac{\int_0^{\varphi_0} (p^2 + q^2) f(\varphi_0)\, d\varphi_0}{2\varphi_0^2 M^2(\varphi_0) \int_0^{\varphi_0} f(\varphi_0) d\varphi_0};$$

$$b = \frac{\int_0^{\varphi_0} (p^2 + q^2) \lambda(\varphi_0)\, d\varphi_0}{2\varphi_0^2 M^2(\varphi_0) \int_0^{\varphi_0} \lambda(\varphi_0)\, d\varphi_0}; \tag{13а}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1 - bX_0^2}{1 - aX_0^2} \operatorname{tg}\gamma. \tag{13б}$$

Воспользовавшись двумя членами разложения биномов в ряд и заменив $X_0 - \frac{X_0^3}{2} \simeq J_1(X)$, можно получить из (13) и (13б) выражения

$$Y_e = 2G_0 \frac{J_1(X)}{X} e^{-j(\delta+\pi)} [1 + (0{,}5 - a) X_0^2 - 0{,}5aX_0^4] \left\{1 + (a-b) \times \right.$$

$$\left. \times [1 - 0{,}5(a+b) X_0^2 - a(a+b) X_0^4] X_0^2 \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right\}, \tag{14}$$

$$\delta = -\frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left\{[1 + (a-b) X_0^2 - abX_0^4] \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}\right\}, \tag{14а}$$

где после интегрирования и подстановок

$$a = \frac{4\varphi_0^2 \sin\varphi_0 + \varphi_0(4-\varphi_0^2)\cos\varphi_0 - \varphi_0\left(3+\frac{2\varphi_0^2}{3}\right)+\left(\frac{\varphi_0^2}{2}-\frac{5}{4}\right)\sin 2\varphi_0 \quad \frac{3}{2}\varphi_0\cos 2\varphi_0}{2\varphi_0^2 M^2(\varphi_0)\,[2\sin\varphi_0 - \varphi_0(1+\cos\varphi_0)]} \tag{14}$$

$$b = \frac{\varphi_0(\varphi_0^2-6)\sin\varphi_0 + 4(\varphi_0^2-1)\cos\varphi_0 + \sin^2\varphi_0 + \left(\frac{\varphi_0^2}{2}-\frac{3}{4}\right)\cos 2\varphi_0 + \frac{19}{4} - \frac{3}{2}\varphi_0\sin}{2\varphi_0^2 M^2(\varphi_0)\,[2(\cos\varphi_0-1)+\varphi_0\sin\varphi_0]}$$

Из выражений (14) и (14а) видно, что первоначальное соотношение (тем точнее, чем меньше отличаются величины a и b друг от друга и от зн чения, равного 0,5, а также чем меньше значения величин X_0 и $\sin\frac{\varphi}{2}$ Графики зависимостей $a(\varphi_0)$ и $b(\varphi_0)$, построенные для первой и второй з генерации, представлены рис. 2. Из них следует, что том краю каждой зоны гене ции, который соответствует м лым φ_0, величины a и b суще венно отличаются друг от др га, причем a незначительно личается от 0,5. Как следует (14а), это будет давать опре ленную погрешность в отыск нии величины δ по формул (11), но почти не даст погре ности в определении из (11) так как в выражении (14) м житель $\sin^2\frac{\varphi_0}{2}$ на этом краю ны близок к нулю. Если в це тре зоны генерации $X < 2$, наибольший вклад, даваем в (14а) членами, содержащи степени X_0, будет менее 30

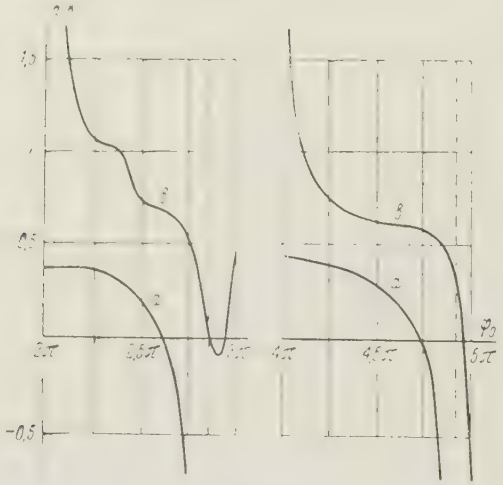


Рис. 2

На краях зон генерации погрешность, получаемая из-за использов ния приближенных выражений (11), уменьшится в связи с уменьшени $2X_0 = X$. Дальнейший анализ мы проводим на основе соотношений (11).

2. АНАЛИЗ РАБОТЫ ГЕНЕРАТОРОВ. СРАВНЕНИЕ С ОТРАЖАТЕЛЬНЫМ КЛИСТРОНОМ

Полагая, что колебательная система генератора образована паралле ным соединением элементов $G_н$, G, C и L (причем $G_н$ — активная про димость согласованной нагрузки, а G определяется потерями в резона ре), можно получить следующие соотношения, характеризующие рабо генератора:

$$P_н = \frac{G_н U^2}{2} = \frac{2G_н U_0^2 X^2 B_0^2}{M^2(\varphi_0)}, \quad \frac{X}{J_1(X)} = \frac{2G_0\cos\delta}{G_н+G} = \frac{2I_0 F(\varphi_0)}{U_0 B^2(G_н+G)}, \tag{1}$$

$$2\Delta\omega C = -(G_н+G)\operatorname{tg}\delta = (G_н+G)\operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{2}; \tag{1}$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Воспользовавшись выражениями (15) и графиком функции X^2 $f\left[\frac{X}{J_1(X)}\right]$ [9], можно отыскать зависимость полезной мощности (P

от угла φ_0 и таким образом построить «зону генерации» прибора. Максимальная мощность будет в центре зоны, где $\varphi_0 = 7{,}55$ — для первой зоны, $\varphi_0 = 13{,}9$ — для второй зоны. Частоты, генерируемые в центрах зон ($\omega_{\text{ц}}$), будут отличаться от резонансной частоты колебательной системы на величины

$$\Delta\omega_{\text{ц}1} = \omega_{\text{ц}1} - \omega_0 = \frac{0{,}675\omega_0}{Q_{\text{н}}}, \quad \Delta\omega_{\text{ц}2} = \frac{0{,}606\omega_0}{Q_{\text{н}}}, \tag{17}$$

где $Q_{\text{н}} = \omega_0 C/(G_{\text{н}} + G)$ — добротность нагруженного резонатора, причем $\Delta\omega_{\text{ц}1}$ относится к первой зоне, а $\Delta\omega_{\text{ц}2}$ — ко второй.

Так как фаза электронной проводимости (δ) равна нулю при $\varphi_0 = 3\pi, 7\pi, \ldots$, т. е. вне зоны генерации, то диодные генераторы нельзя отнести к классу генераторов, рассмотренному в работе [10].

Из (15) следует, что пусковой ток генератора определяется выражением

$$I_{0\text{п}} = \frac{U_0 B^2 \omega_0 C}{Q_{\text{н}} F(\varphi_0)}. \tag{18}$$

Из соотношения $dP_{\text{н}}/dG_{\text{н}} = 0$, используя (15), можно получить условия оптимальной нагрузки генератора при данном X:

$$J_0(X) = \frac{G}{G_0 \cos\delta} = \frac{GU_0B^2}{I_0 F(\varphi_0)}, \quad J_2(X) = \frac{G_{\text{н}}}{G_0 \cos\delta} = \frac{G_{\text{н}} U_0 B^2}{I_0 F(\varphi_0)}. \tag{19}$$

Из (15) следует, что кпд генератора определяется выражением

$$\eta_{\text{н}} = \frac{P_{\text{н}}}{I_0 U_0} = \frac{2G_{\text{н}} F(\varphi_0) B_0^2 X^2}{G_0 M^2(\varphi_0) B^2 \cos\delta}. \tag{20}$$

Используя (19), нетрудно это соотношение привести к виду

$$\eta_{\text{н}} = \frac{2I_0 F^2(\varphi_0) B_0^2}{GU_0 B^4 M^2(\varphi_0)} X^2 J_2(X) J_0(X). \tag{21}$$

При $X = 1{,}84$ (когда $G_{\text{н}} = G$) функция $X^2 J_2(X) J_0(X)$ имеет максимум [3], равный 0,338, поэтому максимальный кпд определяется выражением

$$(\eta_{\text{н}})_m = 0{,}169 \frac{I_0}{GU_0} \left[\frac{4F^2(\varphi_0) B_0^2}{B^4 M^2(\varphi_0)}\right]. \tag{22}$$

Из (22) следует, что при неизменности величины I_0/GU_0 у монотрона $(\eta_{\text{н}})_m$ будет в 32 раза меньше, чем у диода с тормозящим полем (так как у монотрона $B_0^2/B^4 = 1$, а не $32U_0^3/(U_0 - U_2)^3$). Наибольшее значение величины, стоящей в квадратных скобках в выражении (22), будет наблюдаться в первой зоне генерации и равно 0,43 для диода с тормозящим полем. Можно показать [3], что у отражательного клистрона выражение для $(\eta_{\text{н}})_m$ также имеет вид (22), но вместо множителя в квадратных скобках стоит $\beta^2 \cos^2\delta$, где β — коэффициент электронного взаимодействия. Так как в отражательном клистроне обычно $\beta^2 \simeq 0{,}8$, то отсюда следует, что $(\eta_{\text{н}})_m$ у отражательных клистронов приблизительно в 1,8 раза больше, чем у диодов с тормозящим полем.

Из (15) и (16) получаем, что полный диапазон электронной перестройки частоты ($\Delta\omega_p$) у диодных генераторов определяется соотношением

$$\frac{\Delta\omega_p}{\omega_0} = \frac{1}{2Q_{\text{н}}}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi_{01}}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\varphi_{02}}{2}\right) = \frac{\psi_p(K)}{Q_{\text{н}}}, \tag{23}$$

где $K = Q_{\text{н}} I_0/U_0 B^2 \omega_0 C$, причем функция ψ_p строится из того условия, что величины φ_{01} и φ_{02} определяются при помощи графика рис. 1 и со-

отношения $KF(\varphi_0)$ 1. Графики функции $\psi_p(K)$ для первой и второй зон представлены на рис. 3. Для второй зоны генерации функция ψ_p идет ниже, чем для первой. Таким образом, вторая и все последующие зоны генерации менее выгодны как в отношении $(\eta_н)_m$, так и в отношении диапазона электронной перестройки по сравнению с первой зоной.

Из соотношений (15) и (16) получаем, что диапазон электронной

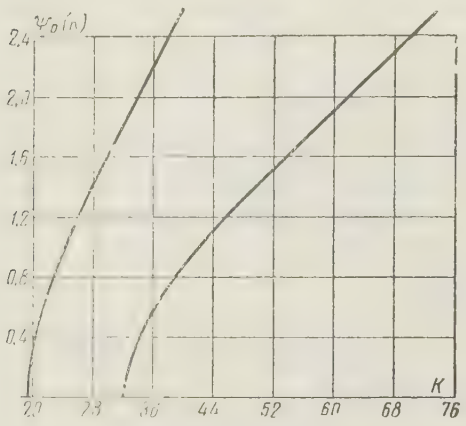


Рис. 3

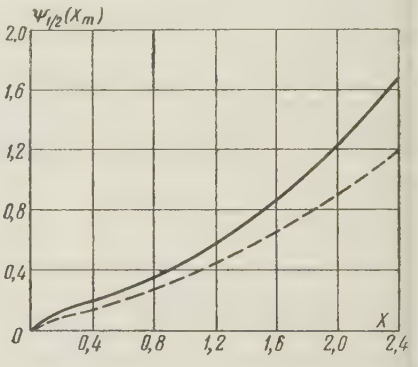


Рис. 4

перестройки до точек половинной мощности $(\Delta\omega_{1/2})$ определяется выражением

$$\frac{\Delta\omega_{1/2}}{\omega_0} = \frac{1}{2Q_н}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi_{01}}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\varphi_{02}}{2}\right) = \frac{\psi_{1/2}(X_m)}{Q_н}, \qquad (24)$$

причем φ_{01} и φ_{02} находятся из условия

$$F(\varphi_0) = \frac{J_1(X_m)\,F(\varphi_{0ц})}{\sqrt{2}J_1(X_m/\sqrt{2})}, \qquad (24а)$$

где X_m — параметр группирования в центре зоны, когда $\varphi_0 = \varphi_{0ц}$. График функции $\psi_{1/2}(X_m)$ для первой зоны генерации показан сплошной линией на рис. 4. Для отражательного клистрона величину $\Delta\omega_{1/2}$ также можно определить выражением (24), но функция $\psi_{1/2}(X_m)$ будет отыскиваться в этом случае несколько иначе [4]. На рис. 4 пунктиром показана функция $\psi_{1/2}(X_m)$ для отражательного клистрона. Из рис. 4 следует, что у диодных генераторов на первой зоне диапазон электронной перестройки до точек половинной мощности более чем на 30% превосходит $\Delta\omega_{1/2}$ отражательных клистронов (можно показать, что на второй зоне у диодов такое превышение менее 15%). Это объясняется смещением центра зоны генерации у диодов из точки $\delta = 0$ в ту область углов пролета, где $\operatorname{tg}\delta \simeq -1$. В связи с этим $\Delta\omega \sim \operatorname{tg}\delta$ будет более эффективно меняться с изменением угла пролета. Этим же объясняется важная особенность диодных генераторов, заключающаяся в несимметрии изменения частоты при отстройке от центра зоны в разные стороны. Так, при отстройке в сторону меньших значений φ_0 частота изменяется значительно сильнее, чем при отстройке в другую сторону. Этим также объясняется увеличение у диодных генераторов крутизны электронной перестройки (в центре зоны), определяемой соотношением

$$-\left(\frac{d\omega}{d\varphi_0}\right)_{пл} = 1{,}42\,\frac{\omega_0}{2Q_н}, \qquad (25$$

о сравнению с отражательными клистронами, у которых

$$-\left(\frac{d\omega}{d\varphi_0}\right)_{\text{д}} = \frac{\omega_0}{2Q_{\text{н}}}. \qquad (25\text{а})$$

если считать справедливыми приближенные выражения (11), то, используя результаты, полученные в теории одноконтурного клистрона [3], можно показать, что укороченное уравнение для амплитуды колебаний в диоде имеет вид

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dt} = \frac{\omega_0}{2Q_{\text{н}}}\left[2\sigma\,\frac{J_1(X)}{X} - 1\right], \qquad (26)$$

где $\sigma = G_0 \cos\delta/(G_{\text{н}} + G)$. Положив в (26) $2J_1(X) \simeq X - \frac{X^3}{8}$, можно, воспользовавшись результатами работы [3], получить закон установления колебаний в диоде:

$$U(t) = U_{\text{с}}\left[1 - \left(\frac{U_{\text{с}}^2}{U_{\text{т}}^2} - 1\right)e^{-\frac{\omega_0}{Q_{\text{н}}}(\sigma-1)t}\right]^{-1/2}, \qquad (27)$$

где $U_{\text{с}}$ — амплитуда в установившемся режиме, определяемая из (15); $U_{\text{т}}$ — начальный толчок амплитуды, возникающий из-за флуктуационных явлений. Время установления колебаний в диоде при этом определится выражением [3]

$$t_{\text{у}} = \frac{Q_{\text{н}}}{\omega_0(\sigma-1)}\left\{\ln\left[Q_{\text{н}}(\sigma-1)\right] + \ln\left[\left(\frac{U_{\text{с}}}{U_{\text{т}}}\right)^2 - 1\right]\right\}. \qquad (28)$$

Влияние нагрузки на работу диодных генераторов по своему характеру аналогично влиянию нагрузки на работу отражательных клистронов и магнетронов. Однако, в отличие от последних, линии равной частоты в нагрузочных характеристиках диодных генераторов никогда не могут быть параллельными оси активных проводимостей и при работе в центре они идут приблизительно под углом 54° к этой оси.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное выше рассмотрение работы диодных генераторов позволяет считать, что диодные генераторы с тормозящим полем не имеют существенных преимуществ перед отражательными клистронами в отношении диапазона электронной перестройки и в величине максимального кпд. Увеличение крутизны электронной перестройки частоты в диодном генераторе в 1,42 раза по сравнению с крутизной перестройки отражательного клистрона будет приводить к полуторакратному ухудшению стабильности генерируемой частоты.

Полученные выше соотношения показывают, что работа диодных генераторов в общих чертах подобна работе отражательных клистронов и что все рассмотренные типы диодных генераторов могут быть изучены и рассчитаны по одному и тому же принципу. Выходные параметры диодов с тормозящим полем могут быть близкими к тем значениям, которые наблюдаются у отражательных клистронов аналогичного номинала. Это подтверждается данными, полученными на моделях диодных генераторов с тормозящим полем [7].

ЛИТЕРАТУРА

В. И. Калинин, Генерирование дециметровых и сантиметровых волн, Связьиздат, 1948.

В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками, ГИТТЛ, 1953.

3. С. Д. Гвоздовер, Теория электронных приборов сверхвысоких часто ГИТТЛ, 1956.
4. В. Н. Шевчик, Основы электроники СВЧ, Изд. Советское радио, 1959.
5. K. Wilmarth, J. Moll, Proc. I. R. E., 1952, **40**, 7, 813.
6. J. Ebers, Proc. I. R. E., 1952, **40**, 2, 138.
7. C. J. Carter, W. H. Cornett, M. O. Thurston, Vide, 1956, 1 65, 281.
8. Э. Грей, Г. Б. Мэтьюз, Функции Бесселя и их приложения к физике механике, ИЛ, 1949.
9. В. А. Малышев, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 10, 1603.
10. В. А. Малышев, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1959, **2**, 3, 463.

Поступила в редакцию
15 II 1960

1961 № 4

РАСЧЕТ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ, СОЗДАВАЕМЫХ БИФИЛЯРНЫМИ СПИРАЛЯМИ В ЛАМПАХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

А. Л. Игрицкий

Дан метод расчета электростатических полей в системах, содержащих бифилярные спирали и предназначенных для периодической электростатической фокусировки сплошных и полых пучков электронов в лампах бегущей волны. Проведены: расчет поля внутри бифилярной спирали, расчет поля в кольцевой области, ограниченной проводящим цилиндром и бифилярной спиралью, расчет поля в кольцевой области, ограниченной двумя бифилярными спиралями, имеющими одинаковый и различный шаг.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из весьма перспективных методов фокусировки пучка электронов в ЛБВ является фокусировка при помощи периодических электростатических полей. Достоинствами этого метода фокусировки являются: отсутствие каких-либо внешних фокусирующих принадлежностей, метод не требует регулировки положения лампы в фокусирующем устройстве и обеспечивает ее малые габариты и вес. Обычно для создания периодических полей в ЛБВ используются бифилярные спирали (при этом бифилярная спираль выполняет одновременно функции фокусирующей и замедляющей систем). В ЛБВ с периодической электростатической фокусировкой применяются как сплошные, так и полые пучки электронов.

В литературе вопрос расчета периодических полей, создаваемых бифилярными спиралями, освещен недостаточно. В [1] приведена формула для распределения потенциала внутри бифилярной спирали, но не указано, каким образом она получена. В [2] даны формулы для распределения потенциала в фокусирующей модели, представляющей собой набор цилиндров. В [3] вместо спиралей вообще рассмотрена плоская задача.

В данной статье изложен метод расчета электростатических полей в системах, содержащих бифилярные спирали и предназначенных для периодической электростатической фокусировки сплошных и полых пучков электронов в ЛБВ. Как показало проведенное исследование, применение метода разделения переменных Фурье в обычном его виде для расчета поля бифилярных спиралей не дает желаемого результата, и для решения задачи необходимо производить замену независимых переменных.

Ниже рассмотрены: расчет поля внутри бифилярной спирали, расчет поля в кольцевой области, ограниченной проводящим цилиндром и бифилярной спиралью, расчет поля в кольцевой области, ограниченной двумя бифилярными спиралями, имеющими одинаковый и различный шаг.

1. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВНУТРИ БИФИЛЯРНОЙ СПИРАЛИ

Бифилярная спираль используется для периодической электростатической фокусировки сплошного пучка электронов [1]. На рис. 1, *а*, *б* показана бифилярная ленточная спираль, имеющая радиус r_1, ширину ленты δ и шаг L. На одну ленту бифилярной спирали подано постоянное напряжение $V_0 + V_f$, а на другую — постоянное напряжение $V_0 - V_f$. Если промежуток d между лентами спирали узкий, то напряженность электри-

ческого поля в этом промежутке можно считать постоянной, а распре ление потенциала при $r = r_1$ приближенно можно принять таким, к показано на рис. 1, *в*. Потенциальное поле внутри спирали должно уд влетворять уравнению Лапласа, которое в цилиндрических координат (r, φ, z) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

Вместо того чтобы определять пол жение точки цилиндрическими координ тами r, φ, z, зададим ее положение кос динатами

$$R=\frac{2\pi}{L}r, \quad \theta=\frac{2\pi}{L}z-\varphi, \quad z.$$

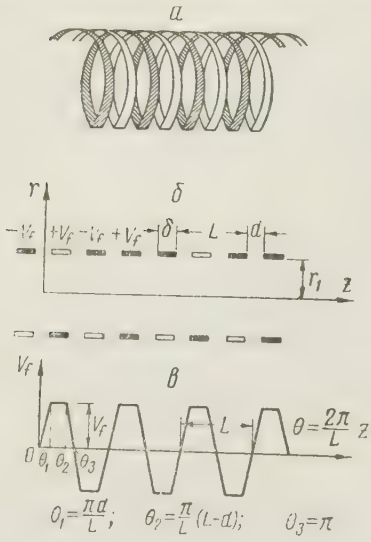


Рис. 1

а — бифилярная ленточная спираль; *б* — разрез с новными размерами; *в* — приблизительное распределе потенциала в плоскости $\varphi = 0$ при $r = r_1$

При этом $\theta=\frac{2\pi}{L}z-\varphi=\text{const}$ геометрически представляет собой вин вую поверхность постоянного шага L, координата $R = \text{const}$ — цили радиуса R и $z = \text{const}$ — плоскость, перпендикулярную оси спира Пересечение этих трех поверхностей и определит точку пространст

Уравнение Лапласа (1) в новых переменных примет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial R}+\left(1+\frac{1}{R^2}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+2\frac{2\pi}{L}\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\theta}=0.$$

При вычислении производных, входящих в (1), учтено, что при н вых переменных V зависит от φ через θ и зависит от z непосредствен и через θ.

В нашем случае электроды, между которыми прикладывается напр жение, ограничены винтовыми линиями. Положение этих линий цел ком определяется заданием двух координат: $R = \text{const}$ и $\theta = \text{con}$ Таким образом, граничные условия не зависят от координаты z. Исхо из этого, нас будет интересовать решение уравнения Лапласа $V(R,$ не зависящее от z. Для этого случая уравнение (3) можно переписа в виде

$$\frac{\partial^2 V(R,\theta)}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial V(R,\theta)}{\partial R}+\left(1+\frac{1}{R^2}\right)\frac{\partial^2 V(r,\theta)}{\partial \theta^2}=0.$$

Пользуясь уравнением Лапласа (4), определим распределение поте циала для бифилярной спирали, показанной на рис. 1, *б*. На одну спиралей подан фокусирующий потенциал $-V_f$, а на вторую $+V_f$. К раз посредине между двумя спиралями находится нулевая эквипоте циальная линия, которая представляет собой также винтовую линию Положение системы координат (r, φ, z) относительно бифилярной сп рали выберем так, чтобы нулевая эквипотенциальная линия $V =$ проходила через точку с координатами $r = r_1$, $\varphi = 0$ и $z = 0$. Тогда новых координатах согласно (2) можно написать следующее граничн

условие:

при
$$R = R_1 = \frac{2\pi}{L} r_1 \quad \theta = 0, \; V = 0. \tag{5}$$

Уравнение (4) решается методом разделения переменных Фурье [4]. Будем искать решение этого уравнения в виде произведения двух функций u и w, из которых одна зависит только от R, а другая — только от θ:

$$V(R, \theta) = u(R)\, w(\theta). \tag{6}$$

Подставляя это значение $V(R, \theta)$ в уравнение Лапласа (4) и разделяя переменные, получим

$$\frac{\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dR^2} + \frac{1}{u}\frac{1}{R}\frac{du}{dR}}{\frac{1}{R^2}} = -\frac{1}{w}\frac{d^2w}{d\theta^2}. \tag{7}$$

Из (7) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения для определения w и u:

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + \nu^2\omega = 0, \tag{8}$$

$$\frac{d^2u}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{du}{dR} - \nu^2\left(1 + \frac{1}{R^2}\right)u = 0, \tag{9}$$

где $\nu^2 = \text{const}$. Так как в фокусирующем устройстве электрическое поле меняется периодически, то целесообразно взять $\nu^2 > 0$. Решая уравнения (8) и (9) для функций w и u, получим выражения

$$w = A_\nu \cos \nu\theta + B_\nu \sin \nu\theta, \tag{10}$$

$$u = C_\nu I_\nu(\nu R) + D_\nu K_\nu(\nu R). \tag{11}$$

Здесь $I_\nu(\nu R)$, $K_\nu(\nu R)$ — видоизмененные функции Бесселя соответственно первого и второго родов, порядка ν [5].

В соответствии с уравнением (6) потенциал равен

$$V_\nu(R, \theta) = (A_\nu \cos \nu\theta + B_\nu \sin \nu\theta)\,[C_\nu I_\nu(\nu R) + D_\nu K_\nu(\nu R)]. \tag{12}$$

Так как величина потенциала конечна на оси симметрии системы, то решение (12) не должно содержать функцию K_ν, которая при $r = 0$ становится бесконечной. Подставляя в (12) граничное условие (5), получим $A_\nu = 0$. Таким образом, уравнение (12) можно представить в виде

$$V_\nu(R, \theta) = B_\nu I_\nu(\nu R) \sin \nu\theta. \tag{13}$$

По координате θ периодическое поле должно иметь период 2π. Исходя из этого, $\nu = n$ — целому числу. Таким образом,

$$V_n(R, \theta) = B_n I_n(nR) \sin n\theta; \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{14}$$

Ряд, составленный из этих членов, взятых с подлежащими еще определению коэффициентами B_n, должен дать искомое распределение потенциала

$$V(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n I_n(nR) \sin n\theta. \tag{15}$$

При $R = R_1 = \frac{2\pi}{L} r_1$

$$V(R_1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n I_n(nR_1) \sin n\theta. \tag{16}$$

С другой стороны, как видно из рис. 1, *в*, распределение потенциала при $R = R_1$ в плоскости $\varphi = 0$ с некоторым приближением можно пред

ставить трапецеидальной кривой. Таким образом, для нахождения коэффициентов B_n достаточно разложить трапецеидальную кривую распределения потенциала в ряд по синусам [4]

$$V(R_1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta, \tag{17}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} V(R_1, \theta) \sin n\theta \, d\theta. \tag{18}$$

Интеграл для b_n удобно разбить на ряд интегралов, так как функция $V(R_1, \theta)$ представляется ломаной линией на участке от 0 до π:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi d}{L}} \frac{V_f L}{\pi d}\,\theta \sin n\theta d\theta + \int_{\frac{\pi d}{L}}^{\pi - \frac{L-d}{L}} V_f \sin n\theta d\theta + \int_{\pi - \frac{L-d}{L}}^{\pi} \frac{V_f L}{\pi d}(\pi - \theta)\sin n\theta d\theta\right].$$

Вычисляя эти интегралы и приводя подобные, окончательно получим

$$b_n = \frac{2}{\pi^2 n^2} \frac{V_f L}{d} \sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right)(1 - \cos n\pi). \tag{19}$$

Из сопоставления (16) и (17) с учетом (19) имеем

$$B_n = \frac{2V_f}{I_n(nR_1)} \frac{1}{\sigma(n\pi)^2} \sin(n\pi\sigma)(1 - \cos n\pi), \tag{20}$$

где

$$\sigma = \frac{d}{L}. \tag{21}$$

Подставляя значение B_n из (20) в (15), получим следующее выражение для распределения потенциала:

$$V(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_f}{\sigma(n\pi)^2} \frac{I_n(nR)}{I_n(nR_1)}(1 - \cos n\pi)\sin(n\pi\sigma)\sin n\theta.$$

Заменяя переменные в соответствии с (2), а также учитывая то, что на обе ленты спирали кроме фокусирующего потенциала $\pm V_f$ подается еще и ускоряющий постоянный потенциал V_0 второго анода электронного прожектора, для распределения потенциала внутри бифилярной спирали будем иметь окончательно выражение

$$V(r, \varphi, z) = V_0 + \sum_n 4V_f \frac{\sin(n\pi\sigma)}{(n\pi)^2\sigma} \frac{I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r\right)}{I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_1\right)} \times$$

$$\times \sin\left(\frac{2n\pi}{L} z - n\varphi\right); \; n = 1, 3, 5, \ldots. \tag{22}$$

2. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ЦИЛИНДРОМ И БИФИЛЯРНОЙ СПИРАЛЬЮ

Исследования периодической электростатической фокусировки показали, что лучшие результаты дает использование пучков электронов с кольцевым поперечным сечением. Для фокусировки такого пучка можно применить схему устройства, показанную на рис. 2. На цилиндр *1*, имею-

ий радиус r_1, подается потенциал V_1. На ленты бифилярной спирали 2 адиуса r_2 подаются напряжения $V_0 + V_f$ и $V_0 - V_f$. Напряжение внутренего цилиндра V_1 задается несколько ниже среднего напряжения бифилярой спирали V_0. Кольцевой пучок электронов проходит в области между илиндром и бифилярной спиралью.

Как и прежде, потенциальное поле в кольцевой области должно удоетворять уравнению Лапласа (1). Пользуясь принципом суперпозиции 3], решение поставленной задачи азобьем на две части, а именно: о-первых, рассчитаем поле меж- у двумя цилиндрами, потенциа- ы которых постоянны и равны V_0 V_1 (при этом пренебрегаем прови- анием потенциала между лентами пирали); во-вторых, рассчитаем оле между внутренним цилинд- ом, потенциал которого равен улю, и бифилярной спиралью, на енты которой подано напряже- ие $\pm V_f$.

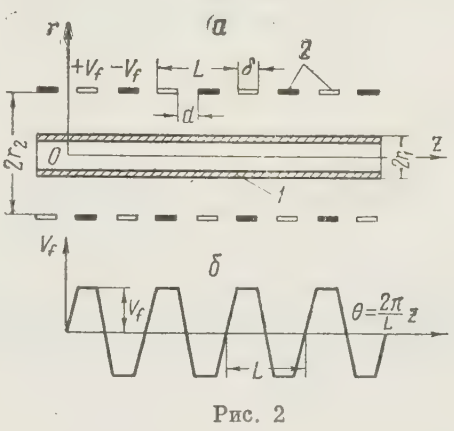


Рис. 2

а—схема устройства с бифилярной спиралью для периодической электростатической фокусировки полого пучка электронов; *б* — распределение потенциала в плоскости $\varphi = 0$ при $r = r_2$

Для первой задачи дифферен- иальное уравнение Лапласа име- т вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0. \qquad (23)$$

Граничные условия можно редставить в виде:

$$\text{при } r = r_1 \quad V = V_1;$$

$$\text{при } r = r_2 \quad V = V_0. \qquad (24)$$

В результате решения уравнения (23) при граничных условиях (24) ля потенциала получается выражение

$$V = V_0 - (V_0 - V_1)\,\frac{\ln\frac{r_2}{r}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}. \qquad (25)$$

Для второй задачи потенциальное поле в кольцевой области должно удовлетворять уравнению Лапласа (4). Граничные условия могут быть аписаны в следующем виде:

$$\text{при } r = r_1 \quad V = 0. \qquad (26)$$

В плоскости $\varphi = 0$ при $r = r_2$ распределение потенциала должно редставляться трапецеидальной кривой, показанной на рис. 2, *б*.

Решая уравнение (4) методом, описанным в § 1, получим для распределения потенциала уравнение (12). Как и прежде, посредине между двумя спиралями находится нулевая эквипотенциальная линия периодического фокусирующего поля. Положение системы координат (r, φ, z) выберем таким образом (см. рис. 2, *а*), что при

$$R = R_2 = \frac{2\pi}{L}r_2 \quad \theta = 0, \quad V = 0. \qquad (27)$$

Подставляя в (12) это граничное условие, получим $A_\nu = 0$. По координате θ периодическое поле по-прежнему должно иметь период 2π. Исходя из этого, $\nu = n$ — целому числу. Таким образом

$$V_n(R, \theta) = [C_n I_n(nR) + D_n K_n(nR)]\sin n\theta; \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (28)$$

Ряд, составленный из членов (28), взятых с подлежащими еще оп делению коэффициентами C_n и D_n, должен дать искомое распределе потенциала

$$V(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n I_n(nR) + D_n K_n(nR)] \sin n\theta. \quad (2$$

Используя граничное условие (26), получим первое уравнение определения коэффициентов C_n и D_n:

$$C_n I_n(nR_1) + D_n K_n(nR_1) = 0. \quad (3$$

При

$$R = R_2 = \frac{2n\pi}{L} r_2$$

$$V(R_2, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n I_n(nR_2) + D_n K_n(nR_2)] \sin n\theta. \quad (3$$

С другой стороны, как видно из рис. 2, *б*, распределение потенц ла при $R = R_2$ в плоскости $\varphi = 0$ может быть представлено трапец дальной кривой. Таким образом, для нахождения коэффициентов C_n D_n необходимо разложить кривую распределения потенциала в ряд синусам

$$V(R_2, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta, \quad (3$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} V(R_2, \theta) \sin n\theta \, d\theta. \quad (3$$

Интеграл для b_n вычисляется так же, как в § 1, и величина b_n дет определяться уравнением (19). Из сопоставления (31) и (32) по чим второе уравнение для определения коэффициентов C_n и D_n:

$$C_n I_n(nR_2) + D_n K_n(nR_2) = b_n. \quad (3$$

Решая совместно уравнения (30) и (34), получим

$$C = \frac{-b_n K_n(nR_1)}{I_n(nR_1) K_n(nR_2) - I_n(nR_2) K_n(nR_1)}, \quad (3$$

$$D = \frac{b_n I_n(nR_1)}{I_n(nR_1) K_n(nR_2) - I_n(nR_2) K_n(nR_1)}. \quad (3$$

Подставляя эти значения C_n и D_n в уравнение (29) и вводя вмес b_n его значение из (19) с учетом (2) и (21), будем иметь

$$V(r, \varphi, z) = 4V_f \sum_n \frac{\sin(n\pi\sigma)}{(n\pi)^2\sigma} \frac{I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_1\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r\right) - K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_1\right) I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r\right)}{I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_1\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_2\right) - K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_1\right) I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_2\right)}$$

$$\times \sin\left(\frac{2n\pi}{L} z - n\varphi\right); \; n = 1, 3, 5, \ldots . \quad (3$$

Действительный потенциал в любой точке кольцевой области меж цилиндром и бифилярной спиралью найдется как сумма потенциало

определяемых формулами (25) и (36):

$$V(r, \varphi, z) = V_0 - (V_0 - V_1)\frac{\ln\frac{r_2}{r}}{\ln\frac{r_2}{r_1}} + 4V_f \sum_n \frac{\sin(n\pi\sigma)}{(n\pi)^2\sigma} \times$$

$$\times \frac{I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_1\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r\right) - K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_1\right) I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r\right)}{I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_1\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_2\right) - K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_1\right) I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_2\right)} \sin\left(\frac{2n\pi}{L} z - n\varphi\right); \qquad (37)$$

$$n = 1, 3, 5, \ldots .$$

3. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ДВУМЯ БИФИЛЯРНЫМИ СПИРАЛЯМИ ОДИНАКОВОГО ШАГА

Наилучшие результаты при фокусировке полых пучков электронов получаются в случае использования бипериодических фокусирующих систем, состоящих из двух бифилярных спиралей, расположенных снаружи и внутри полого пучка (см. рис. 3). При этом одна из бифилярных спиралей (например, внешняя) используется как замедляющая система. Внутренняя же бифилярная спираль выполняется из материала, обладающего высоким сопротивлением, и не участвует в высокочастотном взаимодействии с потоком электронов.

Первоначально рассмотрим более простой случай двух бифилярных спиралей, имеющих одинаковый период L.

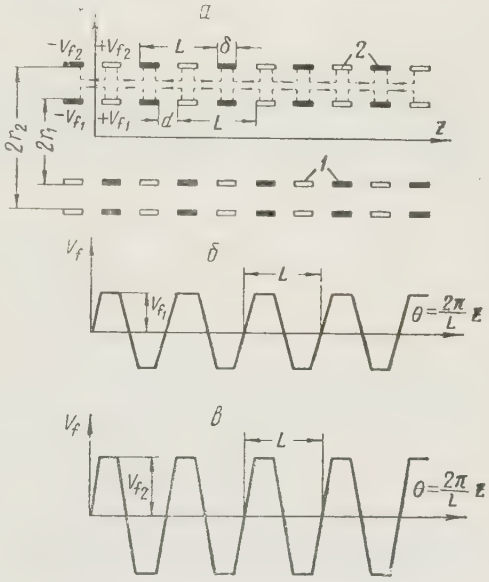


Рис. 3

а — схема устройства для бипериодической фокусировки полого пучка электронов; *б* — распределение потенциала в плоскости $\varphi = 0$ при $r = r_1$; *в* — распределение потенциала в плоскости $\varphi = 0$ при $r = r_2$

Пусть разность потенциалов между лентами внутренней бифилярной спирали *1* равна $2V_{f1}$ и между лентами внешней спирали *2* — $2V_{f2}$. Средний потенциал обеих бифилярных спиралей равен V_0.

Потенциальное поле в пространстве между бифилярными спиралями должно удовлетворять уравнению Лапласа (4). Граничные условия будут следующими: при $R = R_1 = \frac{2\pi}{L} r_1$ и $R = R_2 = \frac{2\pi}{L} r_2$ потенциал должен меняться по трапецеидальным кривым, показанным соответственно на рис. 3, *б*, *в*.

Решая уравнение (4) методом, описанным в § 1, получим для распределения потенциала уравнение (12). По координате θ периодическое поле по-прежнему должно иметь период 2π. Исходя из этого, $\nu = n$ — целому числу. Предположим, что положение спиралей друг относительно друга и положение системы координат выбраны согласно рис. 3. Тогда гранич-

ные условия можем записать в следующем виде:

$$\text{при } R = R_1 = \frac{2\pi}{L} r_1 \quad \theta = 0, \quad V = 0, \tag{38}$$

$$\text{при } R = R_2 = \frac{2\pi}{L} r_2 \quad \theta = 0, \quad V = 0. \tag{39}$$

Подставляя граничное условие (38) в уравнение (12), получи $A_n = 0$ и

$$V_n(R, \theta) = [C_n I_n(nR) + D_n K_n(nR)] \sin n\theta. \tag{40}$$

Ряд, составленный из членов (40), взятых с подлежащими еще опре делению коэффициентами C_n и D_n, должен дать искомое распределени потенциала

$$V(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n I_n(nR) + D_n K_n(nR)] \sin n\theta. \tag{41}$$

При $R = R_1 = \frac{2\pi}{L} r_1$

$$V(R_1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n I_n(nR_1) + D_n K_n(nR_1)] \sin n\theta. \tag{42}$$

С другой стороны, как видно из рис. 3, *б*, распределение потенциа ла в плоскости $\varphi = 0$ при $R = R_1$ может быть представлено трапеце дальной кривой. Таким образом, для нахождения коэффициентов C_n D_n необходимо разложить трапецеидальную кривую распределения по тенциала в ряд по синусам

$$V(R_1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n1} \sin n\theta, \tag{43}$$

$$b_{n1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} V(R_1, \theta) \sin n\theta \, d\theta. \tag{44}$$

Интеграл для b_{n1} вычисляется так же, как в § 1. Величина b_{n} определяется уравнением, аналогичным (19):

$$b_{n1} = \frac{2}{(n\pi)^2} \frac{V_{f_1} L}{d} \sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right)(1 - \cos n\pi). \tag{45}$$

Из сопоставления (42) и (43) получим первое уравнение для опре деления коэффициентов C_n и D_n:

$$C_n I_n(nR_1) + D_n K_n(nR_1) = b_{n1}. \tag{46}$$

Рассматривая аналогичным образом условия у второй границы при $R = R_2 = \frac{2\pi}{L} r_2$, получим второе уравнение для определения коэффици ентов C_n и D_n:

$$C_n I_n(nR_2) + D_n K_n(nR_2) = b_{n2}, \tag{47}$$

где b_{n2} определяется по уравнению (45), только вместо V_{f1} нужно под ставить V_{f2}.

Решая совместно (46) и (47), получим следующие уравнения для C_n и D_n:

$$C_n = \frac{b_{n1} K_n(nR_2) - b_{n2} K_n(nR_1)}{I_n(nR_1) K_n(nR_2) - I_n(nR_2) K_n(nR_1)}, \tag{48}$$

$$D_n = \frac{b_{n2} I_n(nR_1) - b_{n1} I_n(nR_2)}{I_n(nR_1) K_n(nR_2) - I_n(nR_2) K_n(nR_1)}. \qquad (49)$$

Подставляя эти значения C_n и D_n в уравнение (41) с учетом (45), 2) и (21), получим уравнение распределения потенциала в любой точке между спиралями:

$$V(r,\varphi,z) = V_0 + \sum_n \frac{4\sin(n\pi\sigma)}{(n\pi)^2\sigma} \left\{ V_{f1} \frac{I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_2\right) - I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_2\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r\right)}{I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_1\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_2\right) - I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_2\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_1\right)} + \right.$$

$$\left. + V_{f2} \frac{I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_1\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r\right) - I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_1\right)}{I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_1\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_2\right) - I_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_2\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L} r_1\right)} \right\} \sin\left(\frac{2n\pi}{L} z - n\varphi\right);$$

$$n = 1, 3, 5, \ldots . \qquad (50)$$

4. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ДВУМЯ БИФИЛЯРНЫМИ СПИРАЛЯМИ, ИМЕЮЩИМИ РАЗНЫЙ ШАГ

На рис. 4 показана фокусирующая система, состоящая из двух бифилярных спиралей с различным шагом. Пусть разность потенциалов между лентами внутренней бифилярной спирали равна $2V_{f1}$ и между лентами внешней спирали $2V_{f2}$. Средний потенциал обеих бифилярных спиралей равен V_0. Потенциальное поле в пространстве между бифилярными спиралями должно удовлетворять уравнению Лапласа (1). Граничные условия будут следующими: при $r = r_1$ и $r = r_2$ потенциал должен меняться по трапецеидальным кривым, имеющим периоды L_1 и L_2 и показанным соответственно на рис. 4, *б*, *в*.

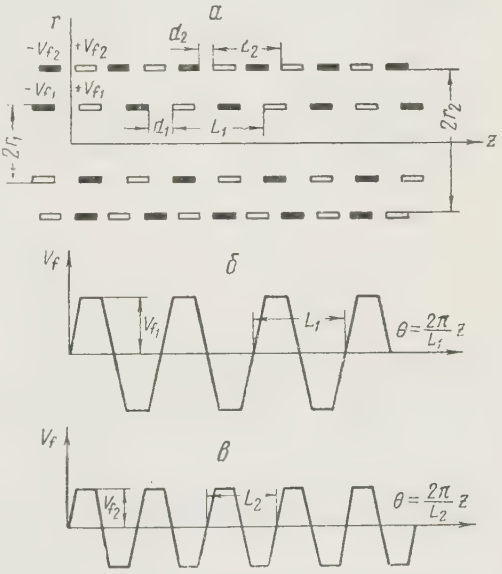


Рис. 4

а — схема устройства для бипериодической фокусировки полого пучка электронов в случае использования бифилярных спиралей с различным шагом; *б* — распределение потенциала в плоскости $\varphi = 0$ при $r = r_1$; *в* — распределение потенциала в плоскости $\varphi = 0$ при $r = r_2$

Решение поставленной задачи произведем, пользуясь принципом суперпозиции. Заменим приближенно внутреннюю бифилярную спираль проводящим цилиндром, имеющим нулевой потенциал, и рассчитаем поле между этим цилиндром и внешней бифилярной спиралью, на ленты которой подано напряжение $\pm V_{f2}$. Расчет поля в этом случае аналогичен расчету, выполненному в § 2, и потенциал в пространстве между цилиндром и внешней бифилярной спиралью можно определить по формуле (36):

$$V_2(r, \varphi, z) = 4V_{f2} \sum_n \frac{\sin(n\pi\sigma_2)}{(n\pi)^2\sigma_2} \frac{I_n\left(\frac{2n\pi}{L_2} r_1\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L_2} r\right) - K_n\left(\frac{2n\pi}{L_2} r_1\right) I_n\left(\frac{2n\pi}{L_2} r\right)}{I_n\left(\frac{2n\pi}{L_2} r_1\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L_2} r_2\right) - K_n\left(\frac{2n\pi}{L_2} r_1\right) I_n\left(\frac{2n\pi}{L_2} r_2\right)} \times$$

$$\times \sin\left(\frac{2n\pi}{L_2} z - n\varphi\right). \qquad (51)$$

Совершенно аналогично заменим внешнюю бифилярную спираль проводящим цилиндром, имеющим нулевой потенциал, и рассчитаем поле между этим цилиндром и внутренней бифилярной спиралью, на ленты которой подано напряжение $\pm V_{f1}$. Тогда получим

$$V_1(r, \varphi, z) = 4V_{f1} \sum_n \frac{\sin(n\pi\sigma_1)}{(n\pi)^2\sigma_1} \frac{I_n\left(\frac{2n\pi}{L_1} r\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L_1} r_2\right) - I_n\left(\frac{2n\pi}{L_1} r_2\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L_1} r\right)}{I_n\left(\frac{2n\pi}{L_1} r_1\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L_1} r_2\right) - I_n\left(\frac{2n\pi}{L_1} r_2\right) K_n\left(\frac{2n\pi}{L_1} r_1\right)}$$

$$\times \sin\left(\frac{2n\pi}{L_1} z - n\varphi\right). \qquad (52)$$

В уравнениях (51) и (52) $n = 1, 3, 5, \ldots$;

$$\sigma_1 = \frac{d_1}{L_1}; \quad \sigma_2 = \frac{d_2}{L_2}. \qquad (53)$$

На основании принципа суперпозиции общий потенциал в пространстве между спиралями будет равен

$$V(r, \varphi, z) = V_0 + V_1(r, \varphi, z) + V_2(r, \varphi, z). \qquad (54)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. P. K. Tien, Focusing of a long cylindrical electron stream by means of periodic electrostatic fields, J. Appl. Phys., 1954, 25, 10, 1281.
2. K. K. N. Chang, Biperiodic electrostatic focusing for high-density electron beams. Proc. I.R.E., 1957, 45, 11, 1522.
3. C. C. Jonson, Periodic electrostatic focusing of a hollow electron beam, IRE Trans. Electron Devices, 1958, ED-5, 4, 233.
4. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, II, ГТИ, 1948.
5. Э. Грей, Г. Б. Мэтьюз, Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, 1953.
6. В. А. Говорков, Электрические и магнитные поля, Связьиздат, 1951.

Поступила в редакцию
6 IV 1960

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ФЕРРИТОВОМ ОБРАЗЦЕ ПРИ РЕГЕНЕРАЦИИ. Ч. I. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТИПОВ КОЛЕБАНИЙ

А. Л. Микаэлян, А. А. Васильев

Рассмотрены явления регенерации на сверхвысоких частотах в ферритовом образце. Исследовано взаимодействие простейших типов собственных колебаний и определены условия, необходимые для их возбуждения.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим ферритовую сферу *, намагниченную в направлении оси постоянным полем напряженности H_0^e (рис. 1). Пусть на феррит воздействует сильное магнитное поле частоты ω_p. Будем считать, что это поле, называемое полем накачки, имеет круговую поляризацию правого вращения в плоскости xy. Амплитуду этого поля обозначим через h_p^e. Возбужденная в феррите намагниченность будет также представлять собой колебания правого вращения в плоскости xy. Частота этих колебаний равна ω_p, а относительная амплитуда записывается в виде [1]

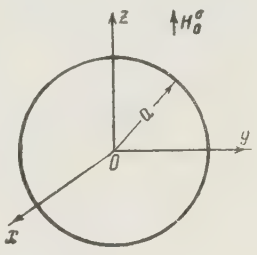


Рис. 1

$$m_0 = \frac{M_p}{M} \frac{h_p^e}{\sqrt{(H_0^e - H_{рез})^2 - (\Delta H_p)^2}}, \qquad (1)$$

где $H_{рез} = \omega_p/\gamma$ — поле, соответствующее ферромагнитному резонансу на частоте ω_p ($\gamma = |e|/mc$); ΔH_p — полуширина резонансной кривой поглощения; H_0^e и h_p^e — внешние поля; M — полный магнитный момент; M_p — амплитуда правополяризованного колебания на частоте ω_p.

Известно [2], что в ферритовом образце, «возмущенном» полем накачки, при определенных условиях возможно самовозбуждение колебаний на частотах ω_1 и ω_2, удовлетворяющих соотношению

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_p. \qquad (2)$$

Происходит это потому, что воздействие поля накачки вызывает периодическое изменение свойств феррита, что создает возможность возбуждения колебаний на частотах ω_1 и ω_2, совпадающих с резонансными частотами собственных колебаний ферритового образца. Условия, при которых наступает генерация колебаний, были впервые определены в [2], а затем в [3]. Критика этих работ приведена в заключении второй части данной статьи [7].

Мы изложим сначала метод исследования явлений в регенерированном феррите (§ 1), а затем проиллюстрируем его рассмотрением простейших

* Рассмотренные ниже явления можно легко перенести и на случай сфероидального ферритового образца.

типов колебаний (§ 2). Во второй части статьи мы рассмотрим взаимодей-
ствие более сложных типов колебаний, возможность которого отрицает-
в [3]. Наконец, во второй части будет выведена общая формула порога ге-
нерации.

1. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Для изучения явлений в ферритовом образце необходимо исследова-
уравнения, описывающие колебательные процессы в возмущенном ферр-
те на частотах ω_1 и ω_2. В случае малых образцов, когда

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad \vec{H} = \operatorname{grad} \Psi, \tag{1}$$

легко получить эти уравнения для потенциалов, связанных внутр-
образца с магнитным моментом следующим соотношением:

$$\operatorname{div} \vec{B}_{1,2} = \operatorname{div} (\vec{H}_{1,2} + 4\pi \vec{M}_{1,2}) = 0, \quad \operatorname{div} 4\pi \vec{M}_{1,2} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \Psi_{1,2}, \tag{2}$$

где индексы 1 и 2 относятся к частотам ω_1 и ω_2. Действительно, пол-
зуясь уравнением движения

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma [\vec{M}\vec{H}] \tag{3}$$

и условием постоянства суммарного магнитного момента, нетруд-
определить индукцию и магнитные моменты на частотах ω_1 и ω_2 п-
воздействии поля накачки, т. е. в возмущенном феррите. Тогда получи-

$$B_{x_1} = \frac{\partial \Psi_1^i}{\partial x} + 4\pi M_{x_1} = \mu_1 \frac{\partial \Psi_1^i}{\partial x} - jk_1 \frac{\partial \Psi_1^i}{\partial y} - \tau_1 \frac{\partial \Psi_2^{i*}}{\partial z},$$

$$B_{y_1} = \frac{\partial \Psi_1^i}{\partial y} + 4\pi M_{y_1} = \mu_1 \frac{\partial \Psi_1^i}{\partial y} + jk_1 \frac{\partial \Psi_1^i}{\partial x} + j\tau_1 \frac{\partial \Psi_2^{i*}}{\partial z}, \tag{4}$$

$$B_{z_1} = \frac{\partial \Psi_1^i}{\partial z} + 4\pi M_{z_1} = \frac{\partial \Psi_1^i}{\partial z} - \tau_2^* \left(\frac{\partial \Psi_2^{i*}}{\partial x} - i \frac{\partial \Psi_2^{i*}}{\partial y} \right),$$

где

$$\mu_1 = 1 + \frac{\omega_0 \omega_M}{\omega_0^2 - \omega_1^2}; \quad k_1 = -\frac{\omega_1 \omega_M}{\omega_0^2 - \omega_1^2};$$

$$\tau_1 = \frac{m_0}{2} (\mu_1 - k_1 - 1) = \frac{m_0}{2} \frac{\omega_M}{\omega_0 - \omega_1}; \tag{7}$$

$$\omega_M = 4\pi\gamma M; \qquad \omega_0 = \gamma H_0^i.$$

При выводе (6) учтены лишь члены первого порядка относительн-
m_0 ($m_0 \ll 1$).

Индукция на частоте ω_2 записывается аналогично (6) с замено-
индекса 1 на 2. После подстановки (6) в (4) получим следующие ура-
нения для потенциалов внутри феррита на частотах ω_1 и ω_2 [3]:

$$\mu_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi_1^i + \frac{\partial^2 \Psi_1^i}{\partial z^2} = (\tau_1 + \tau_2^*) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi_2^{i*}, \tag{8a}$$

$$\mu_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi_1^i + \frac{\partial^2 \Psi_1^i}{\partial z^2} = (\tau_1^* + \tau_2) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi_1^{i*}. \tag{8б}$$

В отсутствие поля накачки ($m_0 = 0$) правые части в уравнениях (8
исчезают. В этом случае система (8), рассмотренная в свое врем-

окером [4], описывает свободные «магнитостатические» колебания
а частотах ω_1 и ω_2. Если пространство внутри сферы отнести к сфе-
ическим координатам ξ, η, φ, то решение однородных уравнений
будет выражаться через присоединенные полиномы Лежандра

$$\psi_1 = \sum_n \sum_m A_{1,n,m}\, \psi_{1,n,m} = \sum_n \sum_m A_{1,n,m}\, P_n^{|m|}(\xi)\, P_n^{|m|}(\cos\theta)\, e^{jm\varphi}. \qquad (9)$$

десь $A_{1,n,m}$ — амплитуда внутреннего колебания на частоте ω_1. Индек-
ы n и m определяют структуру данного типа колебаний, причем m
ожет принимать как положительный (в случае левополяризованных
олебаний), так и отрицательный (в случае правополяризованных коле-
аний) знак.

В области вне феррита, связанной со сферической системой коорди
ат

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \qquad (10)$$

ешение (8) не зависит от наличия поля накачки (так как здесь всегда
$_0 = 0$) и имеет вид

$$\Psi_1^e = \sum_n \sum_m D_{1,n,m}\, \frac{1}{r^{n+1}}\, P_n^{|m|}(\cos\theta)\, e^{jm\varphi}, \qquad (11)$$

де $D_{1,n,m}$ — амплитуда внешнего потенциала на частоте ω_1.

Подробный анализ решений однородных уравнений (8) приведен в ра
отах [4, 5], и мы, не останавливаясь на этих вопросах, перейдем к ре-
ению системы неоднородных дифференциальных уравнений в частных
роизводных.

Как видим, в результате воздействия поля накачки два автономных
олебания на частотах ω_1 и ω_2 становятся связанными между собой.
та взаимосвязь проявляется тем сильнее, чем глубже модуляция свойств
еррита, определяемая величиной m_0.

Решение системы (8) следует искать в виде суммы

$$\Psi_1^i = \psi_1 + \varphi_1, \qquad \Psi_2^i = \psi_2 + \varphi_2, \qquad (12)$$

де ψ_1 и ψ_2 — решения однородных уравнений (8), а φ_1 и φ_2 — частные
ешения указанных неоднородных уравнений, обусловленные присут-
твием поля накачки. При этом амплитуды потенциалов φ_1 и φ_2 связаны
инейно с m_0. Ограничиваясь, как и выше, первым порядком m_0, можно
итать, что, например, правая часть уравнения (8а) зависит только
т потенциала ψ_2^*. Таким образом, φ_1 будет являться частным решением
равнения

$$\mu_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi_1 + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} = (\tau_1 + \tau_2^*)\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x} - j\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_2^*. \qquad (13)$$

ледовательно, задавая потенциал ψ_2^* [5], нетрудно найти какое-либо
астное решение φ_1. Для некоторых случаев эти решения приведены
таблице.

ψ_2	Правая часть уравнения (13)	φ_1
2,0,1	0	0
2,$\bar{1}$,0	$2(\tau_1 + \tau_2^*)$	$(\tau_1 + \tau_2^*)\, z^2$
3,0,1	$-30(\tau_1 + \tau_2^*)(x - jy)$	$-15(\tau_1 + \tau_2^*)(x - jy)\, z^2$
3,$\bar{1}$,0	$80(\tau_1 + \tau_2^*)\,\mu_2^*\, z$	$\frac{40}{3}(\tau_1 + \tau_2^*)\,\mu_2^*\, z^3$

Решение неоднородного уравнения (8б) можно найти аналогичным способом.

В силу непрерывности потенциалов на границе раздела феррит — воздух значение φ_1 на поверхности образца определяет возможные индексы s и m для суммы потенциалов ψ_1, соответствующей решению однородного уравнения (8а). Действительно, разлагая φ_1 на границе в ряд Фурье по полной системе присоединенных полиномов Лежандра $P_q^{|s|}(\cos\theta)$, ортогональных между собой, можно записать *

$$\varphi_1|_{r=a} = \varphi_1(\theta)\, e^{js\varphi} = \sum_q a_q P_q^{|s|}(\cos\theta)\, e^{js\varphi}. \qquad (15)$$

При этом оказывается, что индекс s, определяемый согласно (13) потенциалом ψ_2^*, жестко связан с индексом m этого потенциала следующим образом:

$$s = -(m+1). \qquad (16)$$

Коэффициенты a_q определяются выражением [6]

$$a_q = (2q+1)\,\frac{q-m+1}{q+m+1}\int_0^{\pi} \varphi_1(\theta)\, P_q^{|s|}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta. \qquad (17)$$

Можно убедиться, что (16) отлично от нуля, если выполняются соотношения

$$q = n,\ n-2,\ n-4,\ \ldots, \qquad (18)$$

где n — индекс потенциала ψ_2^*.

Разложение (14) показывает, что потенциал ψ_1 внутри феррита представляет собой сумму потенциалов вида

$$A_{1n} P_n^{|m+1|}(\xi)\, P_n^{|m+1|}(\cos\theta)\, e^{-j(m+1)\varphi},$$

$$A_{1(n-2)} P_{n-2}^{|m+1|}(\xi)\, P_{n-2}^{|m+1|}(\cos\theta)\, e^{-j(m+1)\varphi}.$$

Соответствующая сумма должна быть взята и вне феррита.

Таким образом, в результате взаимодействия потенциала ψ_2 и поля накачки на частоте ω_1 возникает целый спектр колебаний, индексы которых описываются формулами (15) и (17). На частоте ω_2 также будет возбуждаться спектр колебаний с другими индексами. Так, например, возбуждение на частоте ω_1 потенциала 5, 0, 1 приведет к тому, что при накачке на частоте ω_2 возбудится согласно (15) и (17) следующий спектр потенциалов: 5, $\bar{1}$, 0; 3, 1, 0; 1, $\bar{1}$, 0. В свою очередь, потенциал 5, $\bar{1}$, 0 возбудит следующие потенциалы на частоте ω_1: 5, 0, 1; 3, 0, 1; 1, 0, 0.

Существенно отметить, что более высокие потенциалы (например, 7, 0, 1 и 7, $\bar{1}$, 0) в этом случае не возбуждаются. В указанных спектрах потенциалов могут появиться такие потенциалы, которые либо вообще не зависят от приложенного постоянного поля (например, 1, 0, 0), либо не имеют резонансной зависимости (например, 2, 2, 0 и др.).

Как видно из приведенного примера, взаимосвязанными потенциалами оказываются только такие, первые индексы которых одинаковы.

---

* Как известно, система магнитостатических потенциалов не является полной. Требование полноты необходимо в интересах сходимости ряда (14).

Это утверждение совместно с соотношением (15) показывает, что в ре-
енерированном ферритовом образце могут взаимодействовать, например
ледующие потенциалы: 2, 0, 1—2, $\bar{1}$, 0; 3, 0, 1—3, $\bar{1}$, 0; 4, 0, 1—4, $\bar{1}$, 0
, 1, 0—3, $\bar{2}$, 0; 4, 1, 0—4, $\bar{2}$, 0; 4, 2, 0—4, $\bar{3}$, 0 и т. д.

Таким образом, общий закон для индексов взаимодействующих потен-
иалов имеет вид

$$n_2 = n_1,$$

$$m_2 = -(m_1 + 1). \tag{19}$$

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ 2, 0, 1—2, $\bar{1}$, 0

Наиболее простыми потенциалами, взаимодействующими в феррите
вляются потенциалы 2, 0, 1 и 2, $\bar{1}$, 0. Согласно (17) в этом случае спектр
а частотах ω_1 и ω_2 состоит только из указанных потенциалов. Условимся,
то на частоте ω_1 действует потенциал 2, 0, 1, на частоте ω_2 — потенциал
, $\bar{1}$, 0. Представив потенциалы в форме [5]

$$\psi_1 = A_1\left(\frac{x^2+y^2}{2} - \mu_1 z^2\right) + C_1,$$

$$\psi_2 = A_2 z\,(x - jy), \tag{20}$$

де C_1 — некоторая константа, убеждаемся, что правая часть уравнения
(8а) равна константе, а уравнения (8б) — нулю. Это означает, что $\varphi_2 = 0$
Легко убедиться, что

$$\varphi_1 = A_2^*(\tau_1 + \tau_2^*)\, z^2.$$

Выбор частного решения для φ_1 в какой-либо другой форме (например
форме $A_2^*(\tau_1 + \tau_2^*)\frac{x^2+y^2}{2\mu_1}$) не изменит, естественно, конечных результатов.

Для области внутри феррита получим

$$\Psi_1^i = A_1\left(\frac{x^2+y^2}{2} - \mu_1 z^2\right) + A_2^*(\tau_1 + \tau_2^*)\, z_2,$$

$$\Psi_2^i = A_2 z\,(x - jy). \tag{21}$$

Для области вне феррита

$$\Psi_1^e = D_1 \frac{1}{r^3} P_2^0(\cos\theta),$$

$$\Psi_2^e = D_2 \frac{1}{r^3} P_2^1(\cos\theta)\, e^{-j\varphi}. \tag{22}$$

Из условий непрерывности потенциалов на границе феррит - воздух
айдем

$$D_1 = \frac{2}{3} a^5 \left[A_2^*(\tau_1 + \tau_2^*) - \mu_1 A_1 - \frac{1}{2} A_1\right],$$

$$D_2 = \frac{1}{3} a^5 A_2, \tag{23}$$

де a — радиус ферритового образца. Индукция вне феррита B_n^e, нор-
альная к поверхности, получается равной

$$B_{1n}^e\big|_{r=a} = \frac{\partial \Psi_1^e}{\partial r}\bigg|_{r=a} = -2a\left[A_2^*(\tau_1 + \tau_2^*) - A_1\left(\mu_1 + \frac{1}{2}\right)\right]\left[\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right],$$

$$B_{2n}^e\big|_{r=a} = -3aA_2 \sin\theta\cos\theta\, e^{-j\varphi}. \tag{24}$$

При помощи (6) определим нормальную составляющую индукции на границе внутри феррита *:

$$B^i_{1n}|_{r=a} = [\mu_1 A_1 - (\tau_1 + \tau_2^*) A_2^*]\, a -$$
$$- [\mu_1 A_1 - \tau_1 A_2^* + 2\mu_1 (\tau_1 + \tau_2^*) A_2^* + 2\tau_2^* A_2^*]\, a \cos^2\theta, \qquad (25)$$

$$B^i_{2n}|_{r=a} = \{[\mu_2 - k_2 + 1 - 2\tau_2 (\tau_1^* + \tau_2)]\, A_2 + (2\mu_1^* \tau_2 - \tau_1^*) A_1^*\}\, a \sin\theta \cos\theta e^{-j}$$

Из условий непрерывности индукции имеем

$$(4\mu_1 + 1) A_1 = 2 (2\tau_1 + \tau_2^*) A_2^*, \qquad (26)$$

$$[\mu_2 - k_2 + 4 - 2\tau_2 (\tau_1^* + \tau_2)] A_2 = (\tau_1^* - 2\mu_1 \tau_2) A_1^*.$$

Уравнения (26) представляют собой систему, описывающую взаимосвязь двух потенциалов в регенерированном феррите. Приравнивая нулю определитель системы (26), получим

$$(4\mu_1 + 1)(\mu_2^* - k_2^* + 4) = 4\tau_1^2 + 4\tau_1 \tau_2^* + 2\tau_2^{*2} + 4\mu_1 \tau_2^{*2}. \qquad (27)$$

Если поле накачки положить равным нулю, взаимосвязь между колебаниями исчезает, и система (26) распадается на два независимых уравнения

$$4\mu_1 + 1 = 0,$$
$$\mu_2^* - k_2^* + 4 = 0, \qquad (28)$$

которые описывают зависимости резонансных частот от постоянного поля и намагниченности насыщения колебаний 2, 0, 1 и 2, $\bar{1}$, 0, соответственно (см. [5]).

Исследование уравнения (27) показывает, что в рассматриваемой системе возможно самовозбуждение колебаний на частотах ω_1 и ω_2. При некоторых характеристическое уравнение (28) становится комплексным. При этом собственные частоты колебаний имеют вид

$$\dot{\omega}_1 = \omega_1 + j\omega''_{01}, \quad \dot{\omega}_2 = \omega_2 + j\omega''_{02}, \qquad (29)$$

где $\omega''_{01} = \gamma \Delta H_1$; $\omega''_{02} = \gamma \Delta H_2$; ΔH_1 и ΔH_2

— соответственно полуширины резонансных линий первого и второго колебаний. Подставляя (28) в качестве нулевого приближения в правую часть (27), можно определить изменение комплексных частот (29) за счет воздействия поля накачки. При этом оказывается, что приращения мнимых частот, обусловленные полем накачки, имеют знаки, обратные знакам $j\omega''_{01}$ и $j\omega''_{02}$, а по абсолютной величине могут быть больше последних. В случае полной компенсации потерь в системе мнимые части частот, определяемые из (27), должны быть равны нулю, что соответствует отсутствию затухания колебаний на частотах ω_1 и ω_2. Это явление будет иметь место когда

$$m_0 \geqslant 10 \frac{\sqrt{\Delta H_1 \Delta H_2}}{4\pi M} \frac{\sqrt{(\omega_0^2 + \omega_1^2)}}{3\omega_0 + \omega_1} = \frac{2\sqrt{\mu_1'' (\mu_2'' - k_2'')}}{(\mu_1 - k_1 - 1) + 0{,}5 (\mu_2 - k_2 - 1)}, \qquad (30)$$

где

$$\mu_2'' = \frac{\omega_M \omega''_{02} (\omega_0^2 + \omega_2^2)}{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2}; \quad k_2'' = -\frac{2\omega_0 \omega_M \omega_2 \omega''_{02}}{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2}; \qquad (31)$$

величина μ_1'' определяется аналогично μ_2'' с заменой индекса 2 на 1.

* В выражениях (25) слагаемые второго порядка не отброшены. Если их не учитывать, как это сделано в [3], то потенциалы получаются неоднозначными.

Как видим, пороговое значение величины m_0 зависит от полуширины линии каждого колебания ΔH_1 и ΔH_2, намагниченности насыщения и выбора рабочих частот. Пользуясь (1), найдем следующее значение амплитуды внешнего магнитного поля h_p^e, при котором наступает генерация колебания *:

$$h_p^e = 10\sqrt{\Delta H_1 \Delta H_2}\,\frac{\sqrt{2\Omega_H^2 + \frac{4}{5}\Omega_H}}{3\Omega_H - \sqrt{\Omega_H^2 + \frac{4}{5}\Omega_H}} \times \sqrt{\left(\sqrt{\left(\Omega_H^2 + \frac{4}{5}\Omega_H\right)} - \frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H_p}{4\pi M}\right)^2}. \qquad (32)$$

где $\Omega_H = H_0^e/4\pi M$.

Если частота поля накачки не является резонансной, то

$$\left(\sqrt{\Omega_H^2 + \frac{4}{5}\Omega_H}\right)^2 \gg (\Delta H_p/4\pi M)^2.$$

В этом случае для достаточно больших частот ω_1 и ω_2 ($\Omega_H \gg 1$) формула порога значительно упрощается и принимает вид

$$h_p^e \simeq (2{,}35 \cdot 10^{-3} H_0^e - 0{,}66)\sqrt{\Delta H_1 \Delta H_2}. \qquad (33)$$

На рис. 3 рассмотрен в увеличенном масштабе начальный участок графика рис. 2. Здесь также нанесены резонансные линии 2, 0, 1 и 2, $\bar{1}$, 0, частота подкачки и резонансная линия 1, $\bar{1}$, 0 (все в относительной частоте) и относительная величина h_p^e. Точка пересечения линии f_p/f_M и линии 1, $\bar{1}$, 0 ($\Omega_H = 0{,}02$) означает, что в этом случае накачка подается на резонансном потенциале 1, $\bar{1}$, 0. Это обстоятельство приводит к рез-

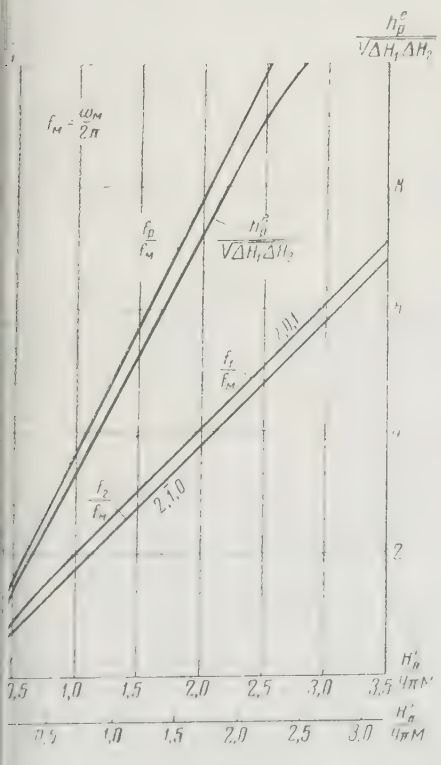


Рис. 2

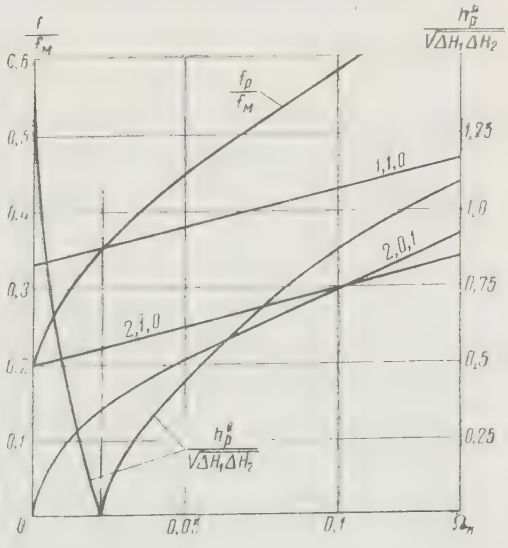


Рис. 3

* Аналогичное выражение с ошибочным множителем, отличающимся вдвое (см. заключение во второй части статьи [7]), получено в [3].

кому снижению порога, который теперь определяется формулой

$$h_p^e = 6{,}2\frac{\Delta H_p}{4\pi M}\sqrt{\Delta H_1 \Delta H_2}. \qquad (34)$$

Для намагниченности $4\pi M = 1700$ гс, характерной для иттриевых ферритовых, пороговое значение внешнего поля равно

$$h_p^e = 3{,}65\cdot 10^{-3}\Delta H_p\sqrt{\Delta H_1 \Delta H_2}. \qquad (35)$$

В точке $\Omega_H = 0{,}1$ резонансные частоты колебаний 2, 0, 1 и 2, $\bar{1}$, 0 равны между собой. Эта точка соответствует «вырожденному» режиму возбуждению колебаний половинной частоты $\left(\omega_{1,2} = \frac{1}{2}\omega_p\right)$.

Порог при этом равен

$$h_p^e = 0{,}88\sqrt{\Delta H_1 \Delta H_2}. \qquad (36)$$

Как видим, критическое значение поля накачки в этом случае не зависит от намагниченности насыщения феррита. На рис. 4 приведен графи

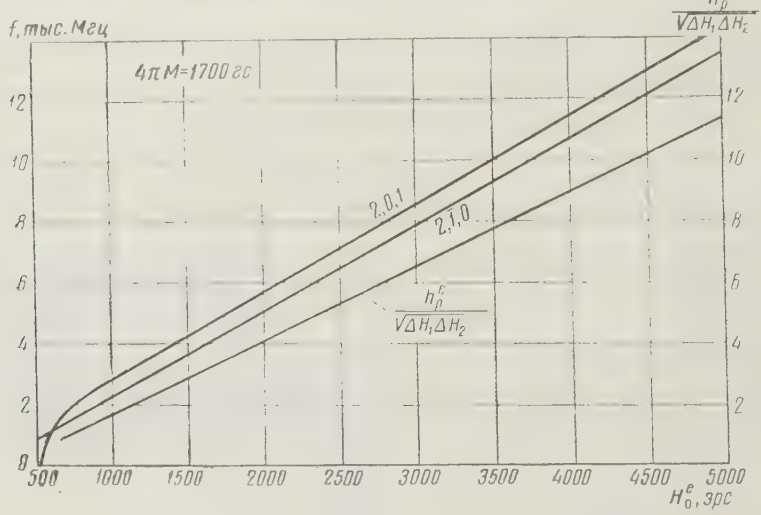


Рис. 4

зависимости порога генерации рассматриваемой пары потенциалов от величины внешнего постоянного поля для намагниченности $4\pi M = 1700$ гс. На этом же графике показана зависимость резонансных частот потенциалов 2, 0, 1 и 2, $\bar{1}$, 0 от величины H_0^e при указанном значении намагниченности насыщения феррита.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Микаэлян, Проблема создания ферритовых усилителей на сверхвысоких частотах, Радиотехника и электроника, 1958, **3**, 11, 1323.
2. H. Suhl, Theory of the Ferromagnetic microwave amplifier, J. Appl. Phys., 1957, **28**, 11, 1225.
3. Я. А. Моносов, К теории нелинейных явлений в ферритах на СВЧ. Ч. I—II. Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 1—2, 59, 278.
4. L. R. Walker, Magnetostatic modes in ferromagnetic resonance, Phys. Rev., 1957, **105**, 2, 39.
5. P. S. Fletcher, R. O. Bell, Ferrimagnetic resonance modes in spheres, J. Appl. Phys., 1959, **30**, 5, 687.
6. Дж. А. Стреттон, Теория электромагнетизма, ГТТИ, 1947, стр. 355.
7. А. Л. Микаэлян, А. А. Васильев, Взаимодействие магнитостатических колебаний в регенерированном ферритовом образце. Ч. II. Условия возбуждения колебаний в общем случае, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 5.

Поступила в редакцию
21 IV 1960

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЩЕЛОЧНОГО ФОТОКАТОДА, ВЫПОЛНЕННОГО В ВИДЕ МАССИВНОГО СЛОЯ

Л. В. Кончук

Сообщено о выполнении многощелочного фотокатода в виде массивного слоя.

Изложены результаты исследований некоторых свойств массивного многощелочного фотокатода: интегральной чувствительности, спектральных характеристик, вторично-эмиссионных свойств.

Проведено сравнение исследованных свойств массивного многощелочного фотокатода со свойствами полупрозрачного многощелочного и некоторых других технических фотокатодов для видимой и инфракрасной областей спектра.

...ИНТЕГРАЛЬНАЯ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МАССИВНОГО МНОГОЩЕЛОЧНОГО ФОТОКАТОДА

Многощелочной фотокатод до недавнего времени выполнялся только в виде полупрозрачного слоя [1, 2, 4, 7].

Соммер указал максимальную интегральную чувствительность для полупрозрачного многощелочного слоя, равную 200 *мка/лм* ($T_{цв}$ = 2870° К) [2].

Мостовский и др. указывают ту же величину максимальной чувствительности полупрозрачного многощелочного фотокатода в отдельных образцах ($T_{цв}$ = 2854° К) [4].

Полупрозрачные многощелочные фотокатоды в фотоэлементах и односкладных фотоэлектронных умножителях, разработанных отечественной промышленностью, имеют чувствительность от 100 до 190 *мка/лм* ($T_{цв}$ = 2854° К) [7].

Интересно отметить, что несмотря на то, что максимальные чувствительности полупрозрачных многощелочных фотокатодов различными авторами указываются приблизительно одинаковыми, приводимые ими спектральные кривые различны.

Так, по данным Соммера, чувствительность полупрозрачного многощелочного фотокатода в коротковолновой области спектра превышает чувствительность сурьмяно-цезиевого фотокатода в этой же области [2]. Однако по данным других авторов чувствительность полупрозрачного многощелочного фотокатода в области длин волн от 300 до 580 *мк* не превышает чувствительности сурьмяно-цезиевого фотокатода [4, 7].

Объяснение этому разногласию дать трудно: можно лишь предполагать, что авторы имели различные фотокатоды, или же искать возможные ошибки в методике сравнения или получения спектральных кривых.

Нами получены многощелочные фотокатоды в виде массивного слоя с максимальной интегральной чувствительностью 230 *мка/лм* ($T_{цв}$ = 2854° К) и спектральными характеристиками, отличными от спектральных характеристик многощелочного фотокатода, выполненного в виде полупрозрачного слоя.

Технология изготовления массивных многощелочных фотокатодов принципиально ничем не отличается от технологии изготовления полупрозрачных фотокатодов, описанной ранее [8].

Таблица 1

Полупрозрачный фотокатод			Массивный фотокатод		
стадия обработки	цвет		стадия обработки	цвет	
	«на просвет»	«на отражение»		«на просвет»	«на отражение»
напыление слоя сурьмы до 40 % уменьшения прозрачности	темн. цвет металл. сурьмы	темн. цвет металл. сурьмы	напыление слоя сурьмы до 99 % уменьшения прозрачности	блестящ. цвет металл. сурьмы	блестящ. цвет металл. сурьмы
обработка слоя сурьмы калием	фиолетовый или сиреневый	фиолетовый или сиреневый	обработка слоя калием	темно-фиолетовый	зеленовато-фиолетовый
обработка сурьмяно-калиевого слоя натрием	желто-коричневый или золотисто-желтый	желто-коричневый или золотисто-желтый	обработка сурьмяно-калиевого слоя натрием	желто-коричневый	голубовато-серый
обработка сурьмяно-калиево-натриевого слоя цезием	не изменяется по сравнению с предыдущим	не изменяется по сравнению с предыдущим	обработка сурьмяно-калиево-натриевого слоя цезием	не изменяется по сравнению с предыдущим	не изменяется по сравнению с предыдущим

Изменение цвета многощелочного фотокатода при обработке щелочными металлами полупрозрачного и массивного слоев сурьмы приведен в табл. 1.

Изготовленный полупрозрачный многощелочной (Sb — K — Na — Cs) фотокатод имеет и на просвет и на отражение желто-коричневый или золотисто-желтый цвет, массивный многощелочной фотокатод имеет на отражение голубовато-серый цвет, а на просвет (насколько это возможно) желто-коричневый или темно-желтый.

Таблица 2

Тип катода		Интегральная чувствительность, *мка/лм*
Ag — O — Cs	массивный	15—70
	полупрозрачный	10—40
Sb — Cs	массивный	30—110
	полупрозрачный	15—60
Bi — Ag — O — Cs	массивный	20—80
	полупрозрачный	15—60

Известно, что технические фотокатоды: кислородно-серебряно-цезиевый (Ag — O — Cs), сурьмяно-цезиевый (Sb — Cs) и висмуто-серебряно-цезиевый (Bi — O — Ag — Cs), выполненные в виде массивного слоя имеют более высокие интегральные чувствительности, чем эти же катоды, выполненные в полупрозрачном варианте. В табл. 2 приведены данные Соммера о чувствительностях указанных выше катодов, выполненных в двух вариантах [3].

Следует отметить, что для полупрозрачного кислородно-серебряно-цезиевого фотокатода иногда указываются чувствительности более выс

ие, чем для массивного. Это расхождение объясняется тем, что в этом лучае полупрозрачные кислородно-серебряно-цезиевые фотокатоды изго-авливаются по другой технологии, чем массивные; например, употреб-яется добавочное подпыление серебра.

Из сказанного о массивном многощелочном фотокатоде следует, что нему применимо то же правило о повышении чувствительности, что и к казанным выше техническим фо-окатодам для видимой и инфра-расной областей спектра.

На рис. 1 и 2 приведены спек-ральные характеристики полу-розрачного и массивного много-щелочных фотокатодов в относи-ельных единицах в сравнении с ругими типами фотокатодов, при-ем на рис. 2 приведены спект-альные характеристики фотока-одов, изготовленных в баллонах из увиолевого стекла *. Для удоб-тва сравнения был сделан пере-чет этих относительных спект-альных кривых в абсолютные в икроамперах на милливатт. Спектральные кривые катодов в аб-олютных единицах приведены на ис. 3 и 4. Из рассмотрения этих ривых видно, что помимо общего величения чувствительности для ассивного многощелочного фото-катода особенно значительно уве-ичение чувствительности в ко-ротковолновой области спектра.

Объяснение увеличения чувст-вительности в массивных слоях и изменения спектральной характе-ристики их по сравнению с полу-прозрачными слоями, очевидно, нужно искать в изменении спек-трального поглощения света в по-верхностном работающем слое фо-токатода, из которого происходит эмиссия электронов.

Объяснение увеличения инте-гральной чувствительности в мас-сивных слоях можно также искать в том факте, что условия использования света в массивных слоях более благоприятны, чем в полупрозрачных: многократно отражаясь от по-верхности кристаллов, расположенных за поверхностным работающим слоем фотокатода, свет может возвратиться в этот слой и вызвать допол-нительный выход электронов в вакуум.

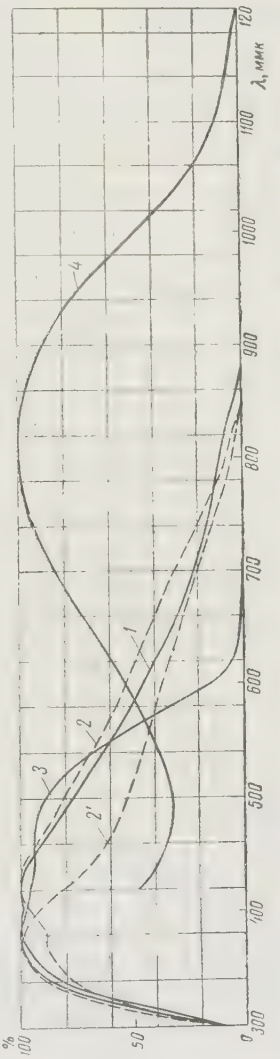


Рис. 1. Кривые распределения чувствительности фотоэлементов по спектру (в относительных единицах):

1 — фотоэлемент с массивным многощелочным катодом на отражение, $\Sigma_i = 210$ *мка/лм*; *2* — фотоэлемент с полупрозрачным многощелочным катодом на просвет, $\Sigma_i = 125$ *мка/лм*; *2'* — на отражение, $\Sigma_i = 79$ *мка/лм*; *3* — фотоэлемент с массивным сурьмяно-цезиевым катодом на отражение, $\Sigma_i = 112$ *мка/лм*; *4* — фотоэлемент с массивным кислородно-серебряно-цезиевым катодом на отражение, $\Sigma_i = 35$ *мка/лм*

2. ВТОРИЧНО-ЭМИССИОННЫЕ СВОЙСТВА

Еще при изготовлении однокаскадных умножителей с полупрозрачными многощелочными катодом и эмиттером было установлено, что полупрозрачные многощелочные слои обладают вторично-эмиссионными свойствами, не уступающими свойствам массивных сурьмяно-цезиевых катодов [7].

* Спектральные характеристики катодов сняты в светотехнической лаборатории под руководством М. И. Эпштейна.

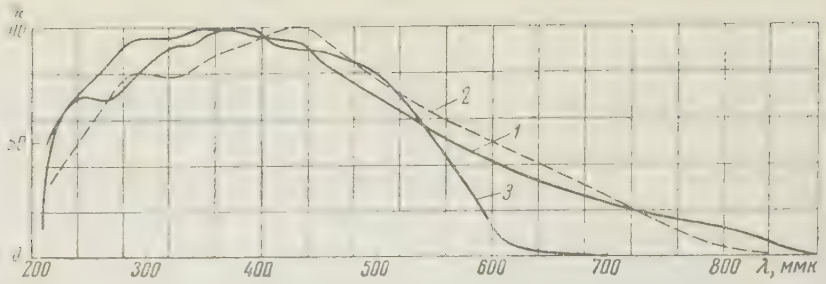


Рис. 2. Кривые распределения чувствительности фотоэлементов в увиолевом стекле по спектру (в относительных единицах):

1 — фотоэлемент с массивным многощелочным катодом на отражение, Σ_i =210 *мка/лм*; *2* — фотоэлемент с полупрозрачным многощелочным катодом на просвет, Σ_i = 98 *мка/лм*; *3* — фотоэлемент с массивным сурьмяно-цезиевым катодом на отражение, Σ_i = 100 *мка/лм*

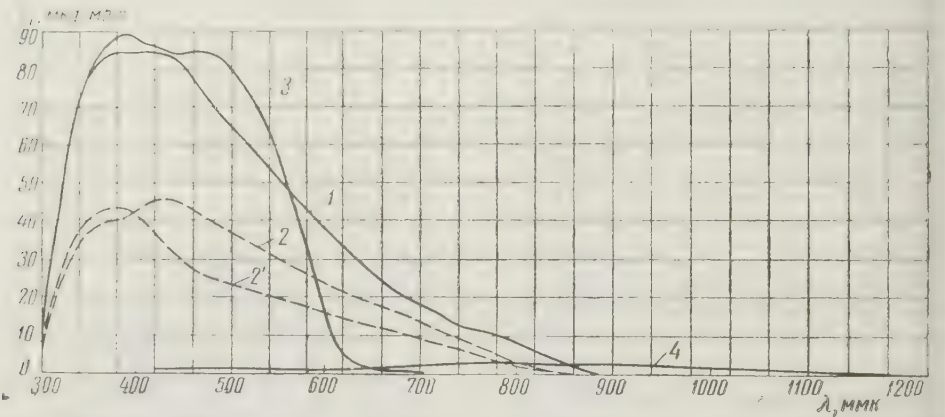


Рис. 3. Кривые распределения чувствительности фотоэлементов по спектру (в абсолютных единицах):

1 — фотоэлемент с массивным многощелочным катодом на отражение, Σ_i = 210 *мка/лм*; *2* — фотоэлемент с полупрозрачным многощелочным катодом на просвет, Σ_i = 125 *мка/лм*; *2'* — на отражение, Σ_i = 79 *мка/лм*; *3* — фотоэлемент с массивным сурьмяно-цезиевым катодом на отражение Σ_i = 112 *мка/лм*; *4* — фотоэлемент с массивным кислородно-серебряно-цезиевым катодом на отражение, Σ_i = 35 *мка/лм*

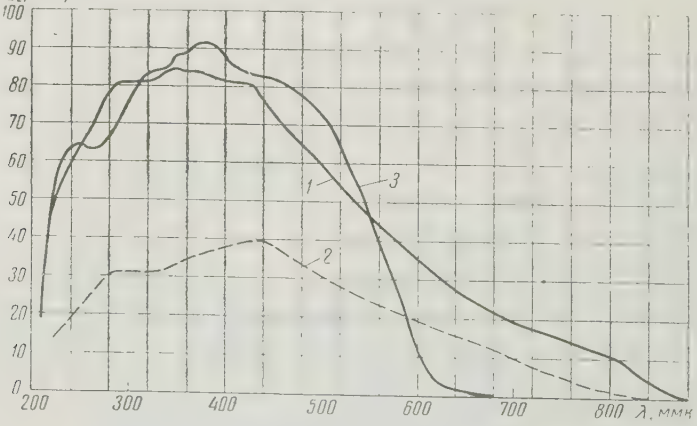


Рис. 4. Кривые распределения чувствительности фотоэлементов в увиолевом стекле по спектру (в абсолютных единицах):

1 — фотоэлемент с массивным многощелочным катодом на отражение, Σ_i = 210 *мка/лм*; *2* — фотоэлемент с полупрозрачным многощелочным катодом на просвет, Σ_i = 98 *мка/лм*; *3* — фотоэлемент с массивным сурьмяно-цезиевым катодом на отражение, Σ_i = 100 *мка/лм*

Коэффициент усиления за счет вторичной эмиссии в разработанной конструкции в среднем равнялся 5—11 при напряжении на аноде 220 *в* и напряжении на эмиттере 170—200 *в*. При минимальной чувствительности катода, равной 100 *мка/лм*, средние интегральные чувствительности однокаскадного фотоэлектронного умножителя оказываются равными 500—1000 *мка/лм*. Максимальная полученная чувствительность равна 1500 *мка/лм*. Однако в процессе изготовления таких умножителей не проводилось сравнение вторично-эмиссионных свойств многощелочного катода с вторично-эмиссионными свойствами других материалов.

В настоящее время при изготовлении однокаскадных умножителей с массивными многощелочными катодом и эмиттером была сделана попытка статистически сравнить вторично-эмиссионные свойства массивных многощелочного и сурьмяно-цезиевых слоев.

Для такого сравнения были изготовлены однокаскадные умножители с массивными многощелочными и сурьмяно-цезиевыми катодами и эмиттером одной конструкции (употреблялась конструкция фотоэлектронного умножителя ФЭУ-1). При изготовлении как тех, так и других умножителей напыление первоначального слоя сурьмы достигало одинаковой толщины.

Первые результаты сравнения вторично-эмиссионных свойств указанных слоев позволяют предположить, что многощелочные слои являются более эффективными эмиттерами вторичных электронов, чем сурьмяно-цезиевые (см. табл. 3).

Таблица 3

Тип фотоумножителя	$V_a = 220$ *в*			$V_a = 500$ *в*		
	интегральн. чувствит. катода, *мка/лм*	общая интегральн. чувствит. умножителя, *мка/лм*	коэф. усиления	интегральн. чувствит. катода, *мка/лм*	общая интегральн. чувствит. умножителя, *мка/лм*	коэф. усиления
Однокаскадный ФЭУ с массивными многощелочными катодом и эмиттером (средн. из 18 шт.)	131	1160	8,86	132	2160	15,75
То же (лучший результат из указанных 18 шт.)	152	1700	11,15	157	3740	23,7
Однокаскадный ФЭУ с массивными сурьмяно-цезиевыми катодом и эмиттером (средн. из 21 шт.)	97	692	7,16	96	1024	10,55
То же (лучший результат из указанных 21 шт.)	110	1052	9,57	109	1495	13,75

Из рассмотрения табл. 3 видно, что, во-первых, общая чувствительность фотоумножителей с многощелочными массивными фотокатодом и эмиттером может быть очень значительна и, во-вторых, коэффициент усиления за счет вторичной эмиссии у многощелочного слоя выше, чем у сурьмяно-цезиевого, особенно при высоких напряжениях на аноде, т. е. при большей скорости первичных электронов.

Отметим замеченное интересное явление: в первый день изготовления умножителей с массивными многощелочными катодом и эмиттером коэффициент усиления при высоких напряжениях (в данном случае, 500 *в* на аноде) может достигать очень больших значений (25—37 на одном каскаде усиления). В течение суток это значение коэффициента усиления резко падает, но все же остается больше, чем у сурьмяно-цезиевых слоев, и далее не изменяется или изменяется незначительно.

Исходя из результатов Спайсера по исследованию энергетических схем сурьмяно-щелочных фотокатодов [5], можно также теоретически предположить бо́льшую эффективность многощелочного фотокатода по сравнению с сурьмяно-цезиевым.

Энергетическая структура многощелочного катода отличается от структуры сурьмяно-цезиевого в основном шириной запрещенной зоны: для многощелочного фотокатода 1,0 *эв*, для сурьмяно-цезиевого 1,6 *эв*, а значения ширины зоны проводимости (по другой терминологии — зоны электронного сродства) у этих типов катодов мало различаются между собой (0,55 *эв* для многощелочного, 0,45 *эв* для сурьмяно-цезиевого) [5].

Известно, что для диэлектриков и собственно полупроводников первоначальное количество вторичных электронов, попадающих в зону проводимости, можно определить как E_p/Q, где E_p — энергия первичных электронов; Q — ширина запрещенной зоны [6]. В самом общем виде это справедливо, очевидно, и для примесного полупроводника.

В данном случае у многощелочного фотокатода первоначальное количество вторичных электронов, попадающих в зону проводимости, должно быть больше, чем у сурьмяно-цезиевого, поскольку ширина запрещенной зоны у него гораздо меньше, чем у сурьмяно-цезиевого фотокатода. Так как в случае многощелочного и сурьмяно-цезиевого фотослоев величины зон проводимости почти равны, можно предположить, что основным фактором, влияющим на увеличение коэффициента вторичной эмиссии, является разница в ширине запрещенных зон.

Следует отметить, что необходимо проведение точных количественных исследований, чтобы сделать окончательный вывод о вторично-эмиссионных свойствах многощелочного фотокатода.

Массивный многощелочной фотокатод, очевидно, найдет широкое применение в различных фотоэлектрических приборах. Особенно перспективным представляется применение массивного многощелочного фотокатода в тех случаях, когда требуется чувствительность в широкой области спектра (коротковолновой и длинноволновой), причем чувствительность в коротковолновой области должна быть не меньше, чем у массивного сурьмяно-цезиевого фотокатода.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Sommer, Rev. Scient. Instrum., 1955, **26**, 725.
2. A. Sommer, IRE Trans. Nucl. Sci., 1956, **3**, 4, 8.
3. А. Соммер, Фотоэлементы (Монография), Изд. Мэтуэн и Ко, Лондон, 2-е изд., 1951.
4. А. А. Мостовский, О. Б. Воробьева, К. А. Майская, Некоторые свойства многощелочных фотокатодов, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1958, 22, 5, 561.
5. W. E. Spicer, Photoemissive, photoconductive and optical absorption studies of alkali-antimony compounds, Phys. Rev., 1958, **112**, 1, 114.
6. Д. Райт, Полупроводники, перев. с англ., ИЛ, 1957.
7. Т. Н. Работнова, Л. В. Конончук, Некоторые данные о параметрах и технологических особенностях фотоэлементов с многощелочными катодами, Светотехника, 1959, 9, 1.
8. Л. В. Конончук, Технология фотоэлементов и однокаскадных фотоэлектронных умножителей с полупрозрачным многощелочным катодом, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 10, 1739.

Поступила в редакцию
28 XI 1960

ВАКУУМНЫЙ КОНДЕНСАТОР МИЛЛИКЕНА. Ч. I

М. Бакал, Л. Н. Добрецов

Изложены физические основы метода вакуумного конденсатора Милликена и структурная схема установки, предназначенной для изучения статистики вторичной электронной эмиссии.

ВВЕДЕНИЕ

Основными характеристиками явления вторичной электронной эмиссии, которые изучались до последнего времени в большинстве работ, являются коэффициент вторичной электронной эмиссии σ, распределение вторичных электронов по энергиям и распределение вторичных электронов по углам вылета.

Коэффициентом вторичной электронной эмиссии называется отношение тока вторичных электронов к току первичных. Эта величина равна среднему числу вторичных электронов, освобожденных одним первичным электроном.

Представляет интерес определение вероятностей P_n выхода того или иного числа n вторичных электронов, освобождаемых при ударе единичного первичного электрона. Распределение этих вероятностей по числам n определяет характеристики некоторых приборов, например амплитудное разрешение и шум фотоэлектронного умножителя, эффективность электронного умножителя для счета электронов. Знание этого распределения позволило бы определить некоторые параметры, фигурирующие в теории явления вторичной электронной эмиссии.

Для измерения числа n можно применить метод конденсатора Милликена, весьма чувствительный метод измерения малого изменения заряда тела, использованный Милликеном [1] в работах по доказательству атомной природы электричества и измерению заряда электрона и А. Ф. Иоффе [2] при изучении элементарного фотоэлектрического эффекта. В одном из вариантов этого метода заряженная частица удерживается в равновесии в электрическом поле плоского конденсатора. Это возможно при условии

$$qeE = mg, \tag{1}$$

где qe — электрический заряд частицы; e - величина заряда электрона; E — напряженность электрического поля плоского конденсатора; m — масса частицы; g — ускорение силы тяжести.

В отличие от опытов Милликена и Иоффе, которые проводились в воздухе при атмосферном давлении, измерение числа n необходимо выполнять при давлении ниже 10^{-3}— 10^{-4} *мм* рт. ст.

Это обстоятельство приводит к значительным усложнениям в применении метода конденсатора Милликена. Ввиду отсутствия в вакууме сил внутреннего трения, частица имеет при ее введении в конденсатор значительную скорость и приобретает за короткое время заметную скорость при измерении ее заряда. Поэтому подбор разности потенциалов между обкладками конденсатора Милликена, уравновешивающей частицу при ее захвате и при изменении ее заряда, не может быть выполнен непосредственно человеком; это может осуществить лишь электронная система автоматического регулирования.

Несмотря на усложнения в методике работы при переходе к вакуумному конденсатору Милликена, его осуществление желательно также и

потому, что этот метод может быть использован для решения и других физических вопросов: для исследования вторичной электронной эмиссии под действием ударов отдельных быстрых электронов и позитронов, вторичной электронной эмиссии под действием ударов единичных ионов, изучения зарядки мелких частиц порошка в вакууме и др.

Разработка метода вакуумного конденсатора Милликена проводилась нами на варианте устройства, предназначенном для измерения числа вторичных электронов, выбитых единичным первичным электроном.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА

В вакуумном конденсаторе Милликена число вторичных электронов n, освобожденных единичным первичным, может быть определено из измерения напряженностей электрического поля E_0 и E между обкладками

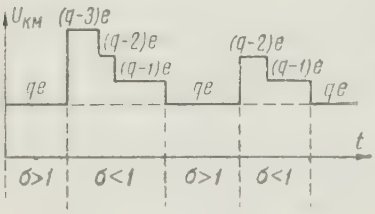


Рис. 1. Схематический график изменения напряжения U_{KM} на конденсаторе Милликена во времени при чередовании режима облучения частицы электронами с энергией, при которой $\sigma > 1$, с режимом облучения электронами с энергией, при которой $\sigma < 1$ (для отрицательно заряженной частицы)

конденсатора, уравновешивающих частицу до и после попадания на нее первичного электрона, при известной массе частицы m, из соотношения *

$$n = \frac{mg}{e}\frac{E - E_0}{EE_0} + 1. \qquad (2)$$

Для определения массы частицы в вакууме нельзя воспользоваться способом, примененным в опытах Милликена, который опирается на использование закона Стокса. В связи с этим предполагается следующий метод: при облучении частицы электронами должны наблюдаться случаи «прилипания», т. е. такого поглощения первичного электрона, при котором не выбивается ни один вторичный. Такие случаи будут наблюдаться особенно часто при облучении частицы электронами с энергией, при которой $\sigma < 1$.

Случаи прилипания единичных первичных электронов легко отличить от случаев выбивания любого числа $n > 1$ вторичных электронов, так как они приводят к изменениям напряжения на конденсаторе Милликена противоположного знака.

Учитывая, что при прилипании первичного электрона изменение заряда частицы равно заряду одного электрона, величина которого известна, можно определить массу частицы из соотношения, легко получаемого из (2):

$$m = \frac{e}{g}\frac{EE_0}{E_0 - E}. \qquad (3)$$

Впрочем, можно обойтись без измерения массы частицы и даже величины напряженности поля. Для этого необходимо после каждого акта вторичной электронной эмиссии с $n > 1$ изменить энергию первичных электронов на такую, при которой $\sigma < 1$, а при достижении исходного напряжения на конденсаторе Милликена вновь возвратиться к режиму $\sigma > 1$. При этом число «скачков» напряжения, вызванных прилипаниями электронов, равно числу вторичных электронов, выбитых с поверхности частицы при акте вторичной электронной эмиссии с $n > 1$ (рис. 1). Такой

* Все соотношения приведены для случая отрицательно заряженной частицы. Ниже указано преимущество работы с отрицательно заряженными частицами.

режим работы позволяет проводить большое число экспериментов с одной частицей.

Выбор размеров частиц и рабочего интервала напряженностей поля конденсатора Милликена должен обеспечить возможность фиксации скачков напряжения, соответствующих как прилипанию одного, так и выходу достаточно большого числа электронов.

В таблице указаны абсолютные значения скачков напряженности поля конденсатора Милликена при изменении заряда частицы на один электронный заряд для разных значений массы частицы и начальной напряженности поля. Из этих данных следует, что указанным выше требованиям можно удовлетворить при работе с частицей, масса которой равна примерно 10^{-10} *г*, в интервале отношений заряда частицы к ее массе $qe/m \simeq 300$—25 CGSE. Такой массой обладает, например, ртутная капля с радиусом 1,2 *мк* или железная сферическая частица с радиусом 1,5 *мк*. Удержание в конденсаторе Милликена частиц с отношением qe/m, заключенным в указанном выше интервале, возможно при напряженностях электрического конденсатора в пределах от 1000 до 12 000 *в/см*.

m, *г*	r_{Fe}, *мк*	r_{Hg}, *мк*	$E - E_0$, *в/см*		
			при $E_0 = 2$ *кв/см*	при $E_0 = 6$ *кв/см*	при $E_0 = 12$ *кв/см*
10^{-10}	1,45	1,20	68	650	2900
$5 \cdot 10^{-10}$	2,48	2,06	14	120	492
10^{-9}	3,14	2,6	6	60	240

Очевидно, что случаи выбивания единичным первичным электроном лишь одного вторичного электрона непосредственно установкой не регистрируются. Для определения числа этих случаев и вероятностей P_n возможны два пути, требующие дополнительного измерения либо плотности тока первичных электронов, либо коэффициента вторичной электронной эмиссии исследуемого вещества.

Первый путь заключается в вычислении среднего числа электронов, попадающих на частицу, на основании измерения плотности тока первичных электронов и радиуса частицы (последний можно легко вычислить, если измерена масса частицы, из [3]). Разность среднего числа первичных электронов, попадающих за некоторый промежуток времени на частицу, и числа электронов, вызвавших регистрируемые изменения ее заряда за тот же промежуток времени, равна числу первичных электронов, освободивших за то же время по одному вторичному электрону.

Второй путь, рассмотренный также в [3], заключается в следующем: составляются отношения $N_n/N = R_n$ числа случаев N_n выбивания n вторичных электронов к общему числу N зарегистрированных случаев изменения заряда частицы за некоторый промежуток времени. Отношения R_n не равны вероятностям P_n, так как в числе N не учитываются случаи, при которых $n = 1$.

Однако отношение значений R_n равно отношению вероятностей P_n:

$$\frac{R_n}{R_e} = \frac{P_n}{P_e}. \tag{4}$$

Для определения абсолютных значений вероятностей P_n необходимо воспользоваться соотношениями (см [4])

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1, \tag{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sigma. \tag{6}$$

При этом способе необходимо знание коэффициента вторичной электронной эмиссии σ.

При изучении числа вторичных электронов, освобожденных единичным первичным, существенно облучать частицу таким образом, чтобы каждое зарегистрированное изменение ее заряда было вызвано попаданием единичного электрона. Это можно осуществить, выбрав величину плотности тока первичных электронов достаточно малой.

Важным вопросом при изучении вторичной электронной эмиссии в вакуумном конденсаторе Милликена является вопрос об определенности энергии первичных электронов, достигающих поверхности частицы. Эта энергия (см. рис. 2) определяется разностью потенциалов U_1 между катодом прожектора электронов и анодом, соединенным с верхней обкладкой

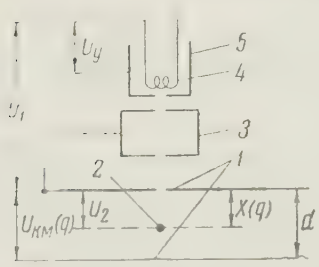


Рис. 2. К вопросу об определенности энергии первичных электронов:

1 — конденсатор Милликена; *2* — частица; *3* — анод прожектора электронов; *4* — катод прожектора электронов; *5* — управляющий цилиндр

конденсатора Милликена, и разностью потенциалов U_2 между верхней обкладкой конденсатора и поверхностью частицы. Если разность потенциалов U_1 можно легко варьировать, стабилизировать и измерять, то разность потенциалов U_2 непостоянна и определяется неточно, так как она зависит от ряда факторов, которые изменяются в ходе эксперимента: разности потенциалов между обкладками конденсатора, вертикальной координаты частицы в конденсаторе и собственного потенциала заряженной частицы.

Один из возможных способов исключения неопределенности U_2 заключается в том, что облучение частицы электронами производится импульсно, в течение периодических кратковременных интервалов времени Δt_1, на которые напряжение с обкладок конденсатора снимается (см. рис. 3).

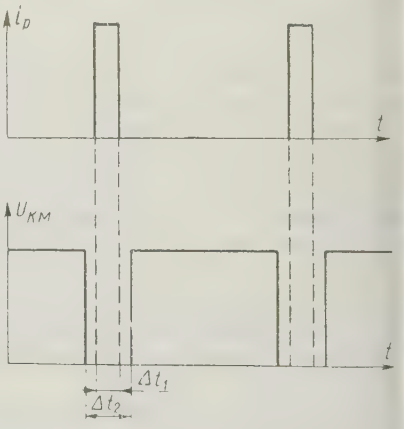


Рис. 3. Временна́я диаграмма облучения частицы электронами: отпирание тока i_p прожектора электронов производится периодически на короткие интервалы времени Δt_1 в промежутках времени Δt_2, когда напряжение с конденсатора Милликена снимается

В промежутки времени Δt_2, когда напряжение с конденсатора Милликена снимается, частица ведет себя как свободно падающее тело. Если промежутки Δt_2 достаточно малы, то частица не успеет сместиться на заметное расстояние Δx. Например, если $\Delta t_2 = 10^{-3}$ *сек*, то $\Delta x = 5 \cdot 10^{-4}$ *см*. Это смещение незначительно и не приведет к потере частицы.

Этот способ не исключает зависимости энергии первичных электронов от собственного потенциала частицы. Для частиц с радиусом, приблизительно равным 1 *мк*, и $qe/m \simeq 25$—300 CGSE величина этого потенциала равна 0,06—0,006 *в* и мала по сравнению с энергией первичных электронов. Однако и такая величина потенциала поверхности может препятствовать уходу медленных вторичных электронов с поверхности положительно

ряженной частицы. В связи с этим целесообразно проводить опыты с рицательно заряженными частицами.

Коэффициент вторичной электронной эмиссии зависит от угла паде- я первичных электронов. При произвольной форме частицы электроны падают на ее поверхность под различными углами, и учет угловой за- симости затруднен. Такой учет возможен, если измерения проводятся сферическими частицами. Работа с частицами сферической формы жела- льна также и потому, что световой поток, рассеянный частицей, не ме- ется при ее поворотах. Как видно из дальнейшего, это существенно для боты системы автоматического регулирования.

2. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА УСТАНОВКИ

Структурную схему установки можно разбить на 8 основных блоков, торые представлены на рис. 4.

В начале эксперимента частица вводится в конденсатор Милликена нжектором частиц ИЧ. Система автоматического регулирования «захва- ывает» частицу и в дальнейшем ржит ее в «подвешенном» состоя- ии в центре конденсатора Милли- на.

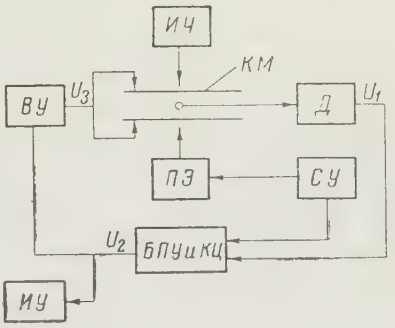


Рис. 4. Структурная схема установки:
М — конденсатор Милликена; *ИЧ* — пнжектор тиц; *Д* — датчик; *БПУ* и *КЦ* — блок предва- тельного усиления и корректирующих цепей; *У* — высоковольтный усилитель; *ПЭ* — прожек- электронов; *ИУ* — измерительное устройство; *СУ* — схема управления

На вход блока предварительного усиления и корректирующих цепей (*БПУ* и *КЦ*) подается сигнал (напряжение U_1), пропорциональный вер- кальной координате частицы. Преобразование координаты в напряже- ие производится датчиком *Д*. С выхода *БПУ* и *КЦ* напряжение U_2 посту- ает на вход высоковольтного усилителя *ВУ* и измерительное устройство *У*. С выхода *ВУ* напряжение U_3 подается на обкладки конденсатора, м достигается замыкание системы автоматического регулирования. зменения напряжения U_2, пропорциональные изменениям U_3, фикси- уются измерительным устройством *ИУ*. Облучение частицы электронами уществляется при помощи прожектора электронов *ПЭ*.

Последний блок, представленный на рис. 4,— схема управления *СУ* — уществляет такое управление прожектором электронов и усилителями, ри котором облучение частицы происходит в отсутствие напряжения меж- обкладками конденсатора. Кроме того, *СУ* управляет работой узлов тановки в начале эксперимента при захвате частицы и выполняет неко- рые другие функции.

Описание отдельных блоков установки вакуумного конденсатора Мил- кена дано в [5].

ЛИТЕРАТУРА

Р. Милликен, Электроны (+ и —), протоны, фотоны, нейтроны и космические лучи, ОНТИ, 1939.

А. Ф. Иоффе, Элементарный фотоэлектрический эффект, С.-Петербург, 1913.

R. E. Barrington, J. M. Anderson, Proc. Phys. Soc., London, 1958, 72, 467, 717.

M. Ziegler, Physica, 1936, 3, 1.

Л. Н. Афиногенов, М. Бакал, Ю. А. Филиппов, Вакуумный конденсатор Милликена. Ч. II, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 4, 658.

Поступила в редакцию
28 XI 1960

1961 №

ВАКУУМНЫЙ КОНДЕНСАТОР МИЛЛИКЕНА. Ч. II

Л. П. Афиногенов, М. Бакал, Ю. А. Филиппов

Приводится описание отдельных блоков установки, предназначенной для изучения статистики вторичной электронной эмиссии.

ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] изложены физические основы метода вакуумного конденсатора Милликена и описана структурная схема установки, предназначенной для изучения статистики вторичной электронной эмиссии. В настоящей статье приведено описание отдельных блоков этой установки.

1. БЛОКИ УСТАНОВКИ ВАКУУМНОГО КОНДЕНСАТОРА МИЛЛИКЕНА

1. Инжектор частиц порошка. Для надежного захвата частиц в вакуумном конденсаторе Милликена большое значение имеет способ их введения в конденсатор. Желательно, чтобы при инжекции вводилась одна частица, обладающая небольшой начальной скоростью и отношением заряда к массе, находящимся в том интервале, на который настроен усилитель.

Наиболее целесообразным оказался способ инжекции, близкий к способу, примененному в [2]: частицы металлического порошка, находящиеся в металлическом резервуаре *1* (рис. 1), отрываются от массы порошка при кратковременном (10^{-3} *сек*) приложении напряжения между резервуаром и анодом, расположенным вблизи поверхности порошка. Этот анод смонтирован на нижней обкладке конденсатора *2*. Отделившаяся частица, попавшая в конденсатор Милликена через отверстия в аноде инжектора, тормозится в поле силы тяжести. Подбором величины импульса напряжения между резервуаром и анодом инжектора (500—1500 *в*) добиваются того, что частица теряет всю свою скорость в пределах конденсатора.

Применялся порошок карбонильного железа, частицы которого имеют сферическую форму и диаметр 1—8 *мк*.

2. Датчик. Датчик, состоящий из осветителя и оптической системы с фотоумножителем, дает на выходе напряжение, пропорциональное вертикальной координате частицы.

Системой автоматического регулирования к датчику предъявляются два специальных требования: 1) необходимо обеспечить малый уровень шумов на выходе, так как при малых размерах частиц полезный сигнал очень мал. Это возможно лишь при достаточно высоком отношении светового потока, рассеянного частицей, и потока паразитного рассеянного света; 2) оптическая система должна обеспечить неподвижность изображения на катоде фотоумножителя при перемещениях частицы, так как чувствительность фотоумножителя неодинакова при освещении различных участков его катода.

На рис. 2 схематически изображено устройство осветителя и оптической системы.

Источником света L служит лампа ДРШ-500; лампа питается постоянным напряжением от аккумуляторной батареи. Столб разряда лампы фокусируется линзой C на диафрагму D_0 с круглым отверстием диаметром 1,5 *мм*. Эта диафрагма изображается объективом O_1 с фокусным расстоянием 110 *мм* в плоскости *II—II*, проходящей через ось конденсатора

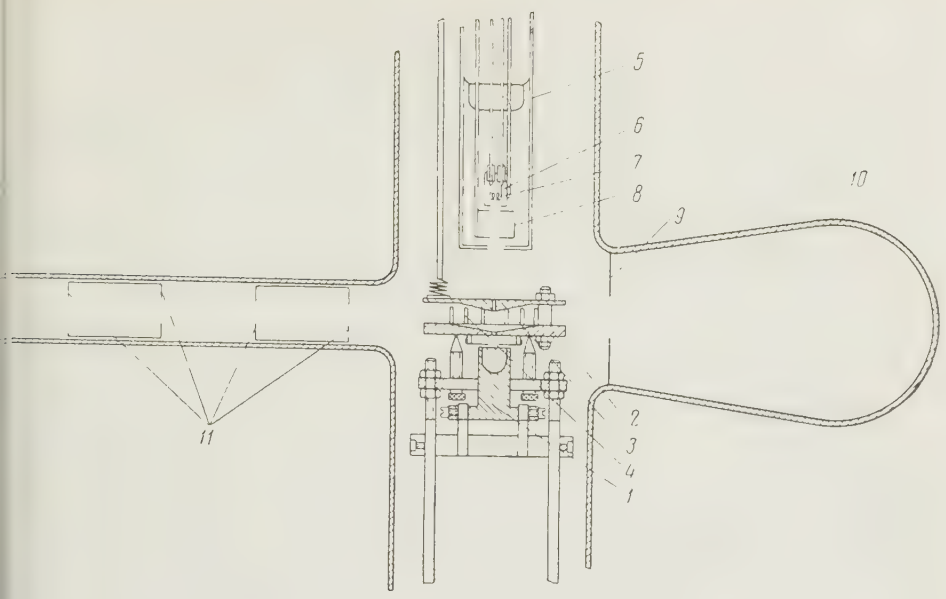


Рис. 1. Общий вид вакуумного прибора:

металлический резервуар для порошка; *2* — нижняя обкладка конденсатора Милликена; верхняя обкладка конденсатора Милликена; *4* — экранирующие стержни; *5* — экран прожектора электронов; *6* — управляющий цилиндр; *7* — катод прожектора электронов; *8* — анод; *9* — диафрагма (D_6 на рис. 2); *10* — баллон (T на рис. 2); *11* — диафрагмы (D_2 — D_5 на рис. 2)

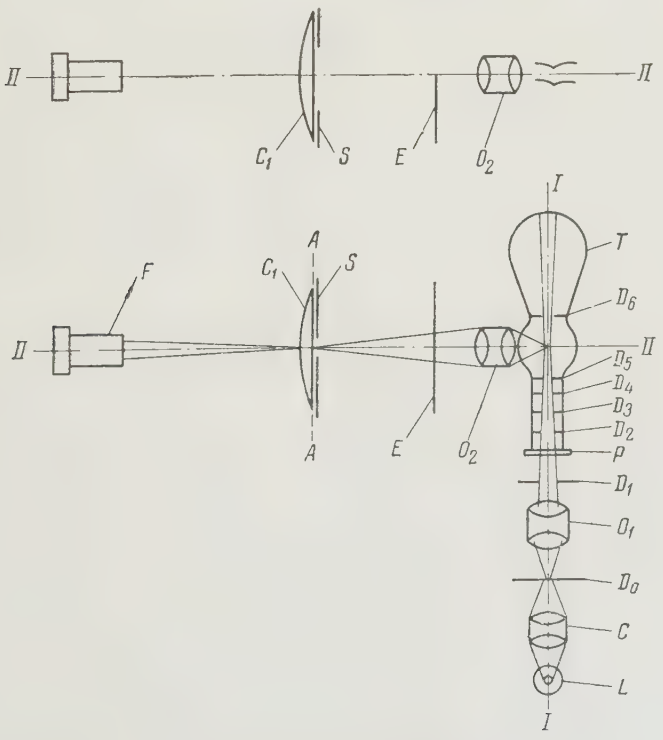


Рис. 2. Схема осветителя и оптической системы

Милликена. Световой пучок проходит внутрь вакуумной трубки чер стеклянное плоскопараллельное шлифованное окно P.

Для уменьшения попадающего на обкладки конденсатора светово потока, рассеянного объективом O_1 и окном P, световой пучок ограни вается диафрагмами $D_1 - D_5$. Выходя из конденсатора, световой пуч попадает через отверстие диафрагмы D_6 в камеру T достаточно больш размеров, чтобы лишь малой доле светового пучка, прошедшего в не удалось вернуться наружу.

Часть света, рассеянного частицей, находящейся вблизи оси конден тора, пройдя через стеклянную стенку вакуумной трубки, фокусирует объективом O_2 (фотообъектив Ю-3) на главную плоскость AA плоско пуклой линзы C_1, совпадающую с ее плоской поверхностью. Здесь расп ложена щель S, ограничивающая попадание на фотоумножитель парази ного рассеянного света.

Между объективом O_2 и линзой C_1 расположен экран E, перекрыва щий область снизу от оптической оси. Этот экран играет роль оптическо клина и позволяет получить приближенно линейную зависимость свет вого потока, достигающего линзы C_1, от вертикальной координаты част цы. Расположенный на таком расстоянии от O_2, что световой поток, ра сеянный частицей, не фокусируется, экран E задерживает часть этого св тового потока, зависящую от вертикальной координаты частицы: при движении вниз, на протяжении 6—8 *мм* вблизи оси оптической систем световой поток, достигающий фотоумножителя, изменяется от нуля максимального значения.

Линза C_1 обеспечивает неподвижность светового пучка, рассеянно частицей на катоде фотоумножителя, при перемещении этой частиц Фотоумножитель и линза C_1 расположены так, чтобы изображение вх ного зрачка объектива O_2 находилось в плоскости катода фотоумножител

Применялся специально отобранный фотоумножитель типа ФЭУ- с малым темновым током.

3. Конденсатор Милликена. Стабилизация ча тицы в горизонтальной плоскости. Система автомат ческого регулирования не воздействует на положение частицы в гор зонтальной плоскости. Поэтому любая горизонтальная составляющ скорости, например получаемая частицей при ее введении в конденсато может вызвать движение частицы от оси конденсатора и привести ее потере.

В описываемом приборе стабилизация частицы в горизонтальной пло кости осуществляется направленными к оси горизонтальными составля щими электрического поля конденсатора, обкладки которого представля собой две конические поверхности с вершинами конусов, обращенным вниз (*2* и *3*, рис. 1). Диаметр обкладок равен 5,4 *см*, расстояние меж ними 0,8 *см*. При такой конфигурации электрического поля наличие н большой горизонтальной составляющей скорости частицы (0,5 *см/с* приведет лишь к колебаниям частицы в горизонтальной плоскости.

Устойчивость частицы в горизонтальной плоскости может быть обесп чена лишь при аксиально-симметричном распределении потенциала в круг оси конденсатора. Такое распределение может нарушаться вводам проходящими вблизи конденсатора и находящимися под напряжение и аксиальной несимметрией стенок стеклянного прибора. Поэтому напр жение подведено к обкладкам конденсатора через вводы, вваренные противостоящие ножки вакуумного прибора. Влияние аксиальной н симметрии стенок прибора устраняется металлическими стержнями аксиально-симметрично расположенными на нижней обкладке конде сатора.

В центре нижней обкладки имеется отверстие диаметром 0,8 *мм*, чер которое инжектируются в конденсатор частицы железа. Через отверст в центре верхней обкладки в конденсатор проходит пучок электронов.

4. Прожектор электронов. Облучение частицы электронами различных энергий производится прожектором электронов простой конструкции, расположенным внутри экрана (рис. 1).

В [1] указано, что получение статистического материала на одной и той же частице возможно лишь при чередовании облучения ее электронами с энергией, при которой коэффициент вторичной электронной эмиссии $\sigma > 1$, с облучением электронами с энергией, соответствующей $\sigma < 1$. При работе с частицами железа энергия первичных электронов, соответствующая $\sigma < 1$, выбиралась в области энергий выше «второй единицы» на кривой зависимости σ от энергии первичных электронов.

5. Структурная схема электрической части установки. Электрические блоки установки должны обеспечить выполнение следующих основных функций.

1. Захват частицы, введенной в конденсатор, при условии, что отношение ее заряда к массе и начальная скорость лежат в допустимых, но достаточно широких пределах.

2. Стабилизация заряженной частицы в конденсаторе при помощи системы автоматического регулирования напряжения на обкладках конденсатора; в частности, система автоматического регулирования должна удерживать частицу при внезапном изменении ее заряда в пределах, возможных в ходе эксперимента.

3. Облучение электронами определенной энергии, достаточно широкого диапазона.

4. Измерение изменений заряда частицы, возникающих в результате ударов единичных электронов.

Для выполнения функций 1 и 2 желательно увеличение быстродействия системы регулирования. Однако вопрос о быстродействии нужно рассматривать совместно с вопросом о шумах, так как методы борьбы с шумовыми сигналами сводятся к воздействию на частотную характеристику системы и, следовательно, на ее быстродействие.

Световой сигнал от частицы, попадающий на фотоумножитель, очень мал ввиду малых размеров частицы и ограниченной яркости источника света. Поэтому шумовой сигнал, возникающий на выходе фотоумножителя, отчасти за счет собственного шума усилителя и собственного (темнового) шума фотоумножителя, отчасти за счет паразитного рассеянного света, а также за счет шума, возникающего на выходе фотоумножителя при воздействии светового сигнала от частицы, может оказаться сравнимым с полезным сигналом.

В связи с этим кругом вопросов сравнивались две системы усиления и преобразования сигнала с выхода фотоумножителя: система с усилителями постоянного тока и система с усилителями переменного тока. Это сравнение привело к следующим выводам.

1. В системе с усилителями переменного тока можно ослабить влияние собственного шума усилителя и собственного (темнового) шума фотоумножителя. Однако они значительно меньше, чем шумы, вызванные паразитным рассеянным светом и световым сигналом от частицы. Применение модуляции света не позволяет существенно уменьшить последние две составляющие шума, так как они также модулируют несущую частоту вместе с основным сигналом.

Следовательно, в отношении борьбы с шумами в данном случае система переменного тока вряд ли может иметь существенные преимущества.

2. Недостатком системы с усилителями постоянного тока является присущий этим усилителям дрейф нуля. Его можно уменьшить применением специальных схем, стабилизацией питающих напряжений и температуры. Кроме того, при захваченной частице система регулирования оказывается замкнутой, и влияние дрейфа резко уменьшается.

3. Система с усилителями переменного тока сложнее системы с усилителями постоянного тока не только из-за наличия дополнительных узлов,

но и вследствие сложности осуществления операции дифференцирования сигналов переменного тока.

По этим соображениям в описываемом варианте была использована система с усилителями постоянного тока.

Для выполнения функции 3 применяется (см. [1]) импульсный способ облучения частицы электронами: прожектор электронов обычно «заперт»

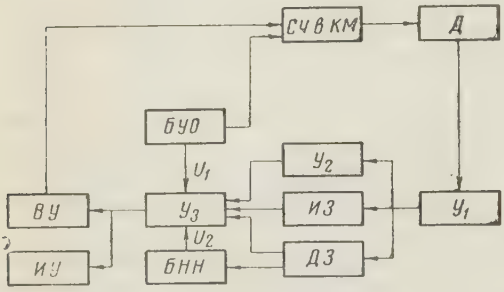


Рис. 3. Структурная схема установки вакуумного конденсатора Милликена:

СЧ в *КМ* — сферическая частица в конденсаторе Милликена; *Д* — датчик; $У_1$, $У_2$, $У_3$ — усилители постоянного тока; *ВУ* — высоковольтный усилитель; *БНН* — блок, задающий начальное напряжение; *БУО* — блок управления облучением; *ИУ* — измерительное устройство; *ИЗ*, *ДЗ* — интегрирующее и дифференцирующее звенья

путем подбора потенциала управляющего электрода и «открывается» лишь периодически на короткие интервалы времени. В эти интервалы и происходит облучение частицы электронами, причем на время облучения снимается напряжение с конденсатора Милликена.

Структурная схема электрической части установки представлена на рис. 3. Частица освещается постоянным световым потоком. Рассеянный частицей свет преобразуется датчиком *Д* в постоянный электрический сигнал, пропорциональный вертикальной координате частицы. Сигнал с выхода датчика усиливается усилителями постоянного тока $У_1$, $У_2$, $У_3$ и высоковольтным усилителем *ВУ*, с выхода которого сигнал подается на конденсатор Милликена.

Имеются корректирующие цепи: дифференцирующее звено *ДЗ*, вырабатывающее сигнал производной, необходимый для устойчивости системы регулирования, и интегрирующее звено *ИЗ*, уменьшающее статическую ошибку системы.

Сигналы от звеньев $У_2$, *ДЗ* и *ИЗ* суммируются усилителем $У_3$. Кроме того, на $У_3$ подаются два управляющих напряжения: U_1 от блока управления облучением (*БУО*) и U_2 от блока, задающего начальное напряжение (*БНН*).

Блок управления облучением (*БУО*) управляет прожектором электронов и усилителем, осуществляя облучение частицы в промежутки времени, когда напряжение с конденсатора Милликена снимается. Он содержит импульсный генератор, подающий импульсы на управляющий электрод прожектора электронов, и усилитель. Импульсное напряжение U_1 поступающее на вход $У_3$, обеспечивает снятие высокого напряжения с конденсатора Милликена в момент облучения частицы электронами.

Напряжение U_2 от *БНН* действует только при захвате частицы. Когда частицы инжектируются в конденсатор Милликена, они обладают начальными скоростями. Для того чтобы захватить частицу, необходимо ее предварительно затормозить в конденсаторе. При инжекции частицы через отверстие в нижней обкладке конденсатора она тормозится в поле силы тяжести. Напряжение на конденсаторе отсутствует; система регулирования отключается до момента, когда скорость частицы станет близкой к нулю, так как сила, создаваемая системой регулирования, действует вверх — противоположно силе тяжести. *БНН* создает запирающее напряжение и определяет момент его снятия.

Напряжение на выходе $У_3$ пропорционально напряжению на конденсаторе Милликена (при работе *ВУ* на линейной части характеристики). К выходу $У_3$ подключено измерительное устройство *ИУ*, состоящее из ка-

ного повторителя и шлейфного осциллографа є записью показаний на
гобумаге. *ИУ* позволяет следить за изменением заряда частицы в ходе
перимента.

Для динамического расчета системы автоматического регулирования
нята расчетная схема, приведенная на рис. 4; там же указаны переда-
ные функции отдельных звень-
При параметрах, указанных
схеме, приведенной на рис. 4,
тема устойчива.

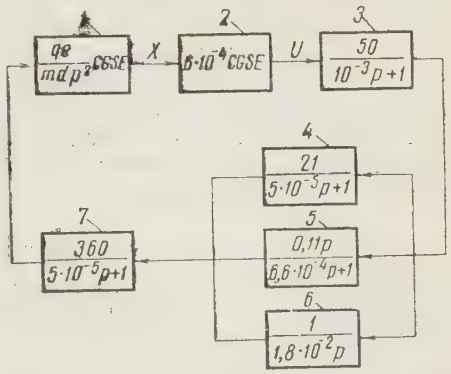


Рис. 4. Расчетная схема системы автоматического регулирования:

1 — частица в конденсаторе Милликена; qe^2 — заряд частицы; m — ее масса; d — расстояние между обкладками конденсатора; 2 — датчик; 3 — первый и второй каскады усилителя (V_1 на рис. 2); 4 — третий и четвертый каскады усилителя (V_2 и V_3 на рис. 2); 5 — дифференцирующее звено и четвертый каскад усилителя; 6 — интегрирующее звено и четвертый каскад усилителя; 7 — высоковольтный усилитель

2. ОПРОБОВАНИЕ УСТАНОВКИ

Опробование установки пока-
ло, что система автоматического
гулирования способна захваты-
ть и устойчиво удерживать в
ление длительного времени же-
зные сферические частицы диа-
гром 2—8 *мк*.

Система автоматического регу-
рования устойчиво удерживает
частицы также при кратко-
ременном периодическом снятии
пряжения с конденсатора Мил-
кена.

Облучение отрицательно заря-
нных частиц электронами с
ергией, при которой $\sigma > 1$, при-
дит к повышению напряжения
конденсаторе; облучение же частицы электронами с энергией, при
горой $\sigma < 1$, приводит к понижению напряжения на конденсаторе,
и следовало ожидать.

Попадание на частицу отдельного электрона вызывает скачкообразное

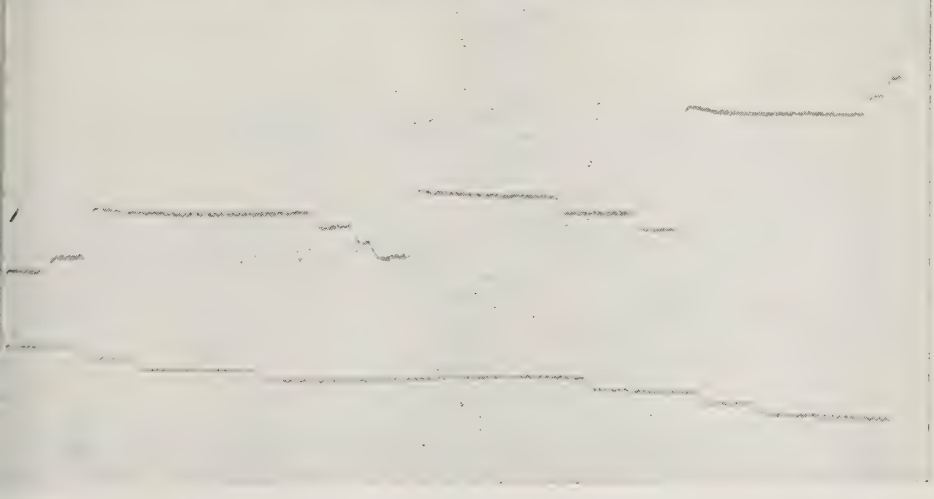


Рис. 5. Осциллограммы напряжения на конденсаторе Милликена:

а — в отсутствие облучения, $U_{KM} = 7500$ *в*; *б* — при облучении частицы в режиме $\sigma > 1$; *в* — при облучении частицы в режиме $\sigma < 1$

изменение напряжения на конденсаторе. Это иллюстрируется приведе ными на рис. 5 осциллограммами напряжения на конденсаторе в отс ствие облучения и при облучении частицы электронами в режиме $\sigma >$ и $\sigma < 1$. Масса частицы, вычисленная из соотношения (3) [1], ра $1{,}26 \cdot 10^{-9}$ *г*. Изменению заряда частицы на один электронный за соответствует скачок напряжения ~ 75 *в*. Скачки вниз соответствуют п липанию первичных электронов, скачки вверх — освобождению $n >$ вторичных электронов. Относительно пологие фронты скачков объяс ются постоянной времени применявшегося измерительного прибора.

Авторы выражают искреннюю благодарность Л. Н. Добрецову, руководством которого проводилась работа, а также Д. В. Шапоту В. А. Иванову, принимавшим участие в проектировании системы авто тического регулирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Бакал, Л. Н. Добрецов, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 4, 6
2. R. F. Wuerker, H. Shelton, R. V. Langmuir, J. Appl. Phy 1959, **30**, 3, 342.

Поступила в редакцию
28 XI 1960

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ШЕННОНОВСКАЯ СХЕМА ДЛЯ ГАУССОВСКОГО СООБЩЕНИЯ С РАВНОМЕРНЫМ СПЕКТРОМ И КАНАЛА С ФЛУКТУАЦИОННЫМ ШУМОМ

Б. С. Цыбаков

Современные доказательства теоремы Шеннона [1] основаны на использованной Шенноном идее случайного кодирования длинных отрезков сообщения. Законченные, математически строгие, доказательства теоремы в случае непрерывной передачи принимают столь громоздкий вид (см., например, [2]), что их восприятие становится весьма затруднительным. В принципе очевидно существуют более простые доказательства прямых утверждений теоремы для некоторых классов каналов и источников сообщений, опирающиеся на заранее известные (найденные или угаданные) способы оптимального кодирования и декодирования.

В настоящей заметке мы хотим обратить внимание на одно простое доказательство прямой теоремы Шеннона в частном случае «белых» гауссовских сообщения и канала. Мы покажем, что линейные методы кодирования и декодирования в рассматриваемом случае оптимальны. Для доказательства использован хорошо известный и развитый аппарат теории оптимальной линейной фильтрации.

Пусть выход источника сообщения $\xi(t)$ представляет собой стационарный гауссовский случайный процесс с равномерным в полосе W частот спектром (спектральной плотностью). Обозначим его спектр через $f_\xi(\omega)$:

$$f_\xi(\omega) = \frac{Q}{W}, \tag{1}$$

Q — мощность сообщения на выходе источника.

Пусть для передачи сообщения имеется канал, сигнал на выходе которого $\eta'(t)$ формируется из сигнала на входе $\eta(t)$ согласно соотношению

$$\eta'(t) = \eta(t) + \zeta(t), \tag{2}$$

$\zeta(t)$ — не зависящий от $\eta(t)$ стационарный гауссовский случайный процесс с равномерным спектром в той же, что и $\xi(t)$, полосе W частот. Обозначим его спектр через $f_\xi(\omega)$:

$$f_\zeta(\omega) = \frac{P_ш}{W}, \tag{3}$$

$P_ш$ — мощность аддитивных шумов в канале.

Будем считать, что сигнал на входе канала $\eta(t)$ обладает конечной заданной мощностью P_c.

Задача состоит в том, чтобы выяснить, существуют (прямая теорема) или не существуют (обратная теорема) такие методы кодирования и декодирования, которые позволили бы вести передачу с заданным условием точности воспроизведения сообщения на выходе.

Будем считать, что допустимым отклонением декодированного сообщения на выходе $\xi'(t)$ от исходного сообщения $\xi(t)$ будет величина среднеквадратичного отклонения σ^2:

$$\sigma^2 = M[\xi(t) - \xi'(t-T)]^2,$$

M — усреднение; T — время задержки сообщения на выходе относительно сообщения на входе.

Известно [1], что для описанной ситуации методы кодирования существуют, если

$$C = W \log\left(1 + \frac{P_c}{P_ш}\right) \geqslant W \log \frac{Q}{\sigma^2} = R, \tag{4}$$

а не существуют при $R > C$.

При выполнении операций кодирования и декодирования, вообще говоря, приходится осуществлять некоторую задержку T передаваемого сообщения. Если величины R и C таковы, что $R < C$, т. е.

$$\sigma^2 > \frac{QP_{ш}}{P_{с} + P_{ш}} = \sigma_0^2,$$

то необходимая задержка T является конечной величиной. При уменьшении σ^2 необходимая величина T, вообще говоря, возрастает, приближаясь при $\sigma^2 \to \sigma_0^2$ к бесконечности.

В качестве операций кодирования и декодирования рассмотрим линейную фильтрацию. Пусть кодирование состоит в линейной фильтрации

$$\eta_1(t) = \int_{-T_1}^{\infty} K(\tau)\, \xi(t-\tau)\, d\tau,$$

где $K(\tau)$ — переходная характеристика фильтра, и последующей задержке выхода фильтра на время T_1

$$\eta(t) = \eta_1(t - T_1).$$

Операция кодирования может быть выполнена при помощи одного линейного физически реализуемого фильтра с переходной характеристикой $K_1(\tau) = K(\tau - T_1)$.

Декодирование пусть осуществляет линейный фильтр

$$\xi'(t) = \int_{-T_1}^{\infty} M_1(\tau)\, \eta'(t-\tau)\, d\tau$$

с запаздыванием T_1. Общая задержка при передаче, возникающая за счет кодирования и декодирования, равна $T = 2T_1$.

Чтобы оценить предельные возможности передачи, рассмотрим фильтры с бесконечным запаздыванием *. Покажем, что в указанных условиях они будут наилучшими кодирующей и декодирующей операциями в шенноновском смысле.

В самом деле, согласно теории оптимальной линейной фильтрации наименьшая среднеквадратичная ошибка $\widetilde{\sigma}_0^2$ при заданных условиях имеет вид (см., например, [3, 4])

$$\widetilde{\sigma}_0^2 = \int \frac{f_\xi(\omega)\, f_\zeta(\omega)\, d\omega}{|k(\omega)|^2 f_\xi(\omega) + f_\zeta(\omega)} = \int \frac{QP_{ш}\, d\omega}{W(|k(\omega)|^2 Q + P_{ш})},$$

где $|k(\omega)|^2$ — квадрат модуля спектральной характеристики кодирующего фильтра, он выбирается из условий

$$\int |k(\omega)|^2 f_\xi(\omega)\, d\omega = P_{с},$$

$$|k(\omega)|^2 = \left[A \sqrt{\frac{P_{ш} Q}{W^2}} - \frac{P_{ш}}{W}\right] \frac{W}{Q}. \qquad (9)$$

В формулах (8) и (9) интегрирование ведется по полосе W; в формуле (10) величина A — неопределенная постоянная **.

На основании (9) и (10) имеем

$$|k(\omega)|^2 = \frac{P_{с}}{Q}, \qquad (10)$$

после чего для $\widetilde{\sigma}_0^2$ получим

$$\widetilde{\sigma}_0^2 = \frac{QP_{ш}}{P_{с} + P_{ш}}. \qquad (11)$$

Сравнивая это выражение с (5), убеждаемся, что рассматриваемые способы кодирования и декодирования являются наилучшими в шенноновском смысле. Тем самым (переход

---

* К фильтрации с бесконечным запаздыванием можно приблизиться сколь угодно точно, выбирая T_1 достаточно большим.

** Выражение для $\widetilde{\sigma}_0^2$ и соотношения (9) и (10) впервые даны Костасом в [3]. Позднее эти же результаты независимо были получены Спиаем [4], в работе которого более подробно описаны вычисления, относящиеся к их выводу.

от (12) к (4) и заменяя знак равенства знаком неравенства) мы доказали прямую теорему Шеннона для гауссовских белых источника сообщений и канала.

То обстоятельство, что линейные методы кодирования и декодирования являются оптимальными среди всевозможных методов, объясняется тем, что в данном случае источник уже сам вырабатывает оптимальные для данного канала сигналы. Задача фильтров состоит лишь в изменении мощностей соответствующих процессов. Можно показать, что даже в казалось бы простом случае гауссовского источника с неравномерным спектром оптимальное кодирование при рассмотренном выше канале является существенно нелинейным. Отыскание наилучших методов кодирования и декодирования требует развития теории нелинейной оптимальной фильтрации.

Заметим в заключение, что среднеквадратичная ошибка $\widetilde{\sigma^2}_0$ будет определяться по формуле (12) также и в том случае, когда процессы с равномерным спектром $\xi(t)$ и $\eta(t)$ являются негауссовскими. Однако при этом условие (4) заменится другим и $\widetilde{\sigma_0}^2$ не будет наименьшей при всевозможных методах кодирования и декодирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. E. Shannon, A mathematical theory of communications, Bell System Techn. J., pt. I, 1948, 27, 379—423; pt II, 1948, 27, 623—656 (сокращенный русск. перевод «Статистическая теория передачи электрических сигналов», Сб. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, ИЛ, 1953).
2. Р. Л. Добрушин, Общая формулировка основной теоремы Шеннона в теории информации, Успехи матем. наук, 1959, 14, 6 (90), 3—104.
3. J. P. Costas, Goding with linear systems, Proc. I.R.E., 1952, 40, 9, 1101.
4. Я. Г. Синай, Наименьшая ошибка и наилучший способ передачи стационарных сообщений при линейном кодировании и декодировании в случае гауссовских каналов связи, Проблемы передачи информации, Изд. АН СССР, 1959, 2, 40.

Поступило в редакцию
26 XI 1960

К ТЕОРИИ ПРИЕМНОЙ АНТЕННЫ

Б. Е. Кинбер

В работе [1] дан вывод формулы для мощности, принимаемой антенной при падении на нее неплоской волны. При выводе этой формулы предполагалось, что доля рассеянной мощности много меньше принятой и, следовательно, падающая волна приближенно удовлетворяет граничным условиям на стенках антенны.

Между тем, в практически интересных случаях (например, падение волны на антенну сбоку, со стороны боковых лепестков диаграммы; расчет взаимного влияния близко расположенных антенн) мощность, рассеянная антенной, значительно превосходит мощность, прошедшую в тракт, и исходные предположения работы [1] явно несправедливы.

В настоящей заметке показано, что формула для принимаемой мощности, полученная в [1], строга и справедлива при любых соотношениях между принимаемыми и рассеянными полями.

Пусть на приемную антенну, согласованную с длинным трактом, в котором может распространяться только один тип волны, падает поле $\vec{E}^n$, $\vec{H}^n$. Волна $\vec{E}^n$, $\vec{H}^n$ есть первичное поле и не удовлетворяет граничным условиям на стенках антенны. Истинным источником поля $\vec{E}^n$, $\vec{H}^n$ является какая-либо другая передающая антенна, которую будем считать системой заданных сторонних токов. Тем самым мы отвлекаемся от анализа многократных дифракций поля на приемной и передающей антеннах.

Поле $\vec{E}^n$, $\vec{H}^n$, падая на приемную антенну, частью проходит в тракт, частью рассеивается (дифрагирует). Результирующее поле, которое удовлетворяет граничным условиям, обозначим через $\vec{E}$, $\vec{H}$.

Согласно теореме эквивалентности [2], систему сторонних токов, являющихся истинными источниками первичного поля, можно заменить совокупностью электрических j_e и магнитных j_m токов, расположенных на замкнутой поверхности S_1, окружающей изнутри эти источники с поверхностной плотностью

$$\vec{j}_e = [\vec{n}\vec{H}^n], \tag{1}$$

$$\vec{j}_m = -[\vec{n}\vec{E}^n], \tag{2}$$

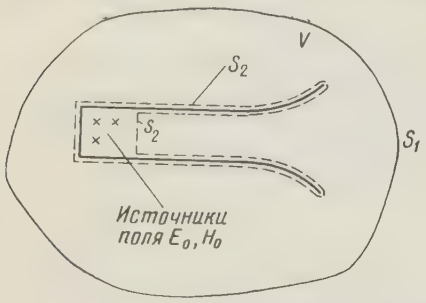
где $\vec{n}$ — наружная нормаль к S_1.

Обозначим через V — объем, ограниченный S_1 и содержащий приемную антенну. Согласно [2], источники, определяемые выражениями (1), (2), возбуждают поле $\vec{E}'$, $\vec{H}'$, которое внутри V совпадает с полным полем $\vec{E}$, $\vec{H}$:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E}, \\ \vec{H}' &= \vec{H} \end{aligned} \qquad \text{внутри } V. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь поле приемной антенны $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ при работе на передачу, которое будем считать известным. Поток мощности $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ выберем равным единице. В тракте антенны поле $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ является трактовой волной, бегущей к «горлу» антенны. Вне антенны $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ есть поле излучения — расходящаяся сферическая волна.

Запишем лемму Лоренца для полей $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ и $\vec{E}'$, $\vec{H}'$. Интегрировать будем по всему бесконечному пространству, ограниченному снаружи поверхностью бесконечно удаленной сферы, а внутри — поверхностью S_2, совпадающей с поверхностью антенны, и сечением s_2 в глубине тракта (см. рисунок).



Так как интеграл по бесконечно удаленной сфере и поверхности S_2 равен нулю, то лемма Лоренца имеет вид

$$\int\limits_{S_2} (\{[\vec{E}'\vec{H}_0] - [\vec{E}_0\vec{H}']\}, \vec{n})\, ds = \int\limits_{S_1} \{(\vec{j}_e\vec{E}_0) - (\vec{j}_m\vec{H}_0)\}\, ds. \tag{4}$$

Подставляя вместо $\vec{j}_e$ и $\vec{j}_m$ их выражения из (1), (2); заменяя $\vec{E}'$, $\vec{H}'$ на $\vec{E}$, $\vec{H}$ согласно (3) и учитывая, что согласно [3]

$$\int\limits_{S_2} (\{[EH_0] - [E_0H]\}, \vec{n})\, ds = C_{-0}N_{-0}, \tag{5}$$

где

$$N_{-0} = \int\limits_{S_2} (\{[\vec{E}_0\vec{H}_0^*] + [\vec{E}_0^*\vec{H}_0]\}, \vec{n})\, ds \tag{6}$$

($\vec{E}_0^*\vec{H}_0^*$ — комплексно-сопряженное $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$), получим, что искомая амплитуда C_{-0} волны, принятой антенной, внутри тракта равна

$$C_{-0} = \frac{\int\limits_{S_1} (\{[\vec{E}^n\vec{H}_0] - [\vec{E}_0\vec{H}^n]\}, \vec{n})\, ds}{\int\limits_{S_2} (\{[\vec{E}_0\vec{H}_0^*] + [\vec{E}_0^*\vec{H}_0]\}, \vec{n})\, ds}. \tag{7}$$

Волна $\vec{E}_{-0}$, $\vec{H}_{-0}$, принимаемая антенной, аналогична волне $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$, но движется в обратном направлении.

Запишем также выражение для принятой мощности:

$$P_{\text{пр}} = \frac{\left|\int\limits_{S_1} (\{[\vec{E}^n\vec{H}_0] - [\vec{E}_0\vec{H}^n]\}, \vec{n})\, ds\right|^2}{4\int\limits_{S_2} (\{[\vec{E}_0\vec{H}_0^*] + [\vec{E}_0^*\vec{H}_0]\}, \vec{n})\, ds}. \tag{8}$$

Окончательные формулы (6), (7) справедливы также и в том случае, когда в тракте могут распространяться M ортогональных друг другу типов волн, создающих

зличные поля излучения $\vec{E}_m$, $\vec{H}_m (m \ll M)$. Формулы (6) и (7) дают в этом случае поле и щность волны m-типа в тракте. Эти поля и остаток, который превращается антенной рассеянное поле, ортогональны друг другу; полный поперечник рассеяния антенны ляется суммой поперечников рассеяния для каждой компоненты первичного поля.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность А. Пистолькорсу и Я. Н. Фельду за ценные советы при подготовке настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

Э. Л. Бурштейн, О мощности, принимаемой антенной при падении на нее неплоской волны, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 2, 186.
Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенны сантиметровых и дециметровых волн, Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1955.
Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1957.

Поступило в редакцию
10 XI 1960

О ЗАТУХАНИИ МЕДЛЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕННОМ СТЕРЖНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. П. Шестопалов, И. П. Якименко

Дисперсионное уравнение для плазменного стержня в продольном магнитном ле установлено и исследовано без учета потерь в работе [1]. Это же уравнение по-чено в работе [2] путем предельного перехода от системы спираль — плазма к плаз-нному стержню и имеет следующий вид:

$$\varepsilon_z f \frac{I_{11} I_{12}}{I_{01} I_{02}} + \frac{\sqrt{f_0}}{2 f_1 \sqrt{\varepsilon}} \left\{ [\varepsilon_z - 1 + (\varepsilon_z + 1) f_1] f_+ \frac{I_{11}}{I_{01}} - \right.$$

$$\left. - [\varepsilon_z - 1 - (\varepsilon_z + 1) f_1] f_- \frac{I_{12}}{I_{01}} \right\} \frac{K_{10}}{K_{00}} + \frac{f_- f_+}{|\varepsilon|} \frac{K_{10}^2}{K_{00}^2} = 0, \qquad (1)$$

е

$$= 1 - \frac{1}{m^2}; \quad f_1 = \sqrt{1 + \frac{4\varepsilon_z}{m^2 \sigma^2 f_0^2}}; \quad f_\pm = \sqrt{\varepsilon_z \left(1 - \frac{\varepsilon}{m^2}\right) + \frac{\varepsilon - \varepsilon_z}{2} f_0 (1 \pm f_1)}; \qquad (2)$$

$$I_{ik} = I_i(\gamma_k a); \quad K_{ik} = K_i(\gamma_k a) \ (i = 0,1; \ k = 0, 1, 2); \quad \gamma_0 = \beta \sqrt{f_0}; \quad \gamma_{1,2} = \frac{\beta f_\pm}{\sqrt{\varepsilon}};$$

$= \omega / v_\Phi$ — продольная постоянная распространения; $m = c / v_\Phi$ — замедление; ε ε_z — составляющие тензора диэлектрической проницаемости; $\sigma = \omega_н / \omega$; ω — часто-сигнала; $\omega_н$ — гирочастота; v_Φ — зовая скорость замедленной вол-ы; c — скорость света в вакууме; — радиус плазменного стержня; (x), $K_0(x)$ — модифицированные нкции Бесселя первого и второго дов.

Уравнение (1) позволяет опре-лить дисперсию медленных элект-магнитных волн. Оно справедливо области, заштрихованной на рис. 1. а область ограничена кривыми $= 0$, $\varepsilon\varepsilon_z = 1$ (граничная частота, е. частота, при которой $m^2 \to \infty$) и $)^2 = 2(\sigma - 1)/(\sigma - 2)$ $(l = \omega_0 / \omega$, — ленгмюровская частота плаз-ы). Ниже последней кривой од-временно γ_1 и γ_2 — действитель-ые числа.

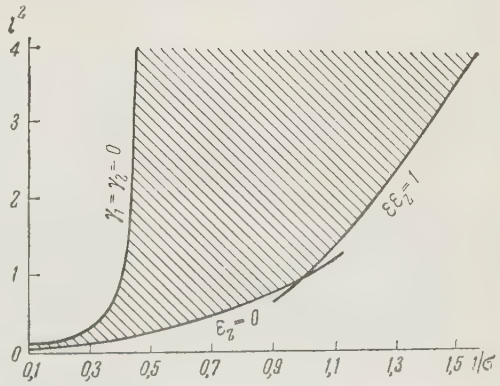


Рис. 1

Если затухание волн не очень ве-ико, т. е. действительные части сос-вляющих тензора диэлектрической проницаемости ε', ε_z' и продольной постоянной спространения β' значительно больше соответствующих мнимых частей ε'', ε_z'', β'', то зложение соответствующих членов уравнения (1) по малому параметру с сохра-

нением только линейных величин позволяет получить как дисперсионное уравнение системы (для случая отсутствия потерь), так и ее затухание.

При больших замедлениях ($m > 10$) дисперсионное уравнение принимает следующий сравнительно простой вид:

$$\sqrt{\varepsilon'\varepsilon_z'} = \frac{I_0\left(\beta'\sqrt{\frac{\varepsilon_z'}{\varepsilon'}}\,a\right) K_1(\beta' a)}{I_1\left(\beta'\sqrt{\frac{\varepsilon_z'}{\varepsilon'}}\,a\right) K_0(\beta'\alpha)},$$

а потери в системе определяются выражением

$$\beta'' a = \frac{\dfrac{\varepsilon'\varepsilon_z'' + \varepsilon_z'\varepsilon''}{2\sqrt{\varepsilon'\varepsilon_z'}}\,\frac{I_1}{I_0} + \dfrac{\beta' a}{2|\varepsilon'|}\,(\varepsilon_z''\varepsilon' - \varepsilon''\varepsilon_z')\left(\frac{I_1}{I_0}\right)'}{\left(\frac{K_1}{K_0}\right)' - |\varepsilon_z'|\left(\frac{I_1}{I_0}\right)'},$$

где

$$\varepsilon' = 1 + \frac{(l\sigma)^2}{\sigma^2 - 1}; \qquad \varepsilon'' = \frac{\left(1 + \frac{1}{\sigma^2}\right) l^2\sigma\delta}{\left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right)^2};$$

$$\varepsilon_z' = 1 - (l\sigma)^2; \qquad \varepsilon_z'' = l^2\sigma^3\delta;\ \delta = \frac{\nu}{\omega_н};$$

ν — эффективная частота соударений в плазме; $(I_1/I_0)'$, $(K_1/K_0)'$ — производные отношений функций Бесселя по аргументу. Аргументы функций I_i равны $\beta'\sqrt{\frac{\varepsilon_z'}{\varepsilon'}}$ функций K_1 — $\beta' a$. Выражения (5) верны, если рабочая частота удалена от гир частоты ($\sigma \neq 1$).

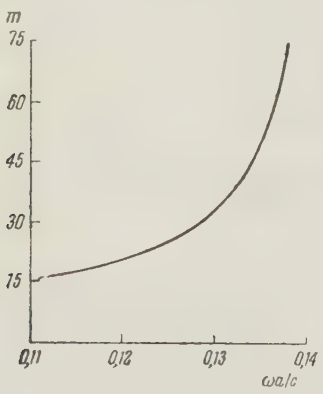


Рис. 2

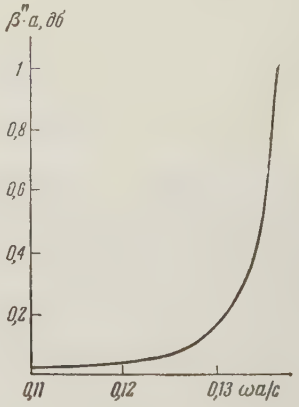


Рис. 3

Дисперсионная зависимость плазменного стержня и затухание приведены рис. 2, 3 для $l^2 = 3\omega_н a/c = 0{,}1$, $\delta = 10^{-3}$. Кривые показывают, что в плазменном стержне, помещенном в продольное магнитное поле, можно получить замедление аксиально-симметричных волн порядка 10—20 при затуханиях ниже 0,1 *дб/см*. При дальнейшем приближении к граничной частоте одновременно с ростом замедления силы возрастают потери.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Файнберг, М. Ф. Горбатенко, ЖТФ, 1959, 29, 5, 549.
2. Б. М. Булгаков, В. П. Шестопалов, Л. А. Шишкин, И. П. Яковленко, ЖТФ, 1960, 30, 7, 805.

Харьковский государственный университет им. А. М. Горького

Поступило в редакцию 9 IX 1960

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НА ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Ф. Г. Басс

В работе [1] выведено граничное условие для нормальной составляющей электрического поля на плоской поверхности с произвольным значением диэлектрической проницаемости. В ряде случаев это граничное условие не является полностью определяющим решение задачи. Например, для полей, у которых нормальная составляющая тождественно равна нулю, это условие обращается в тождество, и граничная задача должна решаться с использованием граничных условий для тангенциальных составляющих электромагнитного поля.

Граничные условия для тангенциальных составляющих электрического поля получаются при помощи векторной формулы Грина и точных граничных условий методом, аналогичным тому, который использован в [1]. Эти граничные условия имеют вид

$$[\vec{n}, \vec{E}(\vec{r})] = -\frac{ik}{2\pi}\int \frac{e^{ik\sqrt{\varepsilon}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\left\{[\vec{n}\,[\vec{n}, \vec{H}(\vec{r}')]] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k^2\varepsilon}[\vec{n}\nabla](\nabla\,[\vec{n}, \vec{H}(\vec{r}')])\right\} d\vec{r}' \quad \text{при } z = 0. \tag{1}$$

Здесь $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — электрическое и магнитное поля; $k = \omega/c$; ε — комплексная диэлектрическая проницаемость; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к плоскости $z = 0$:

Если $|\varepsilon| > 1$, то формулу (1) можно переписать так:

$$[\vec{n}, \vec{E}] = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(1 + \frac{1}{k^2\varepsilon}\Delta\right)^{-1/2}\left\{[\vec{n}\,[\vec{n}, \vec{H}]] + \frac{1}{k^2\varepsilon}[\vec{n}\nabla](\nabla\,[\vec{n}, \vec{H}])\right\} \text{ при } z = 0, \tag{2}$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа по координатам x и y.

Используя уравнения Максвелла, из (2) можно исключить магнитное поле. После несложных преобразований получатся такие граничные условия для электрического поля:

$$\frac{\partial E_{x,y}}{\partial z} + ik\sqrt{\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{k^2\varepsilon}\Delta\right)^{1/2} E_{x,y} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\frac{\partial E_z}{\partial x, y}, \tag{3}$$

при $z = 0$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{ik}{\sqrt{\varepsilon}}\left(1 + \frac{1}{k^2\varepsilon}\Delta\right)^{1/2} E_z.$$

Отметим, что второе из граничных условий (3) является непосредственным следствием граничных условий в форме (2) или, что одно и то же, первого из граничных условий (3).

Разлагая граничное условие (2) по степеням $\Delta/k^2\varepsilon$ и удерживая первый член разложения, получаем граничные условия Леонтовича.

Используя граничные условия (3), решим следующую задачу: рассмотрим класс решений однородных волновых уравнений *, для которых граничные условия (1)—(3) являются локальными. К этому классу, как легко видеть, относятся плоские волны. Граничная задача для плоских волн решается при помощи коэффициента отражения. Оказывается, что его можно ввести в более общем случае.

Из граничных условий в форме (2)—(3) видно, что они являются локальными, если составляющие электромагнитного поля на плоскости $z = 0$ являются собственными функциями двумерного оператора Лапласа Δ. Мы ограничимся менее общим случаем, когда составляющие электромагнитного поля являются собственными функциями двумерного оператора Лапласа во всем верхнем полупространстве. Как легко видеть, решение волнового уравнения в этом предположении можно искать в следующем виде:

$$E_i = g_i^{(+)}(x, y)\, e^{i\varkappa z} + g_i^{(-)}(x, y)\, e^{-i\varkappa z}, \tag{4}$$

где $g_i^{(\pm)}(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta g_i^{(\pm)}(x, y) + (k^2 - \varkappa^2)\, g_i^{(\pm)} = 0 \quad (i = x, y, z). \tag{5}$$

* В рассматриваемой задаче уравнения Максвелла сводятся к волновым уравнениям для составляющих электромагнитного поля.

Как известно [2], общее решение уравнения (5) запишется так:

$$g(x, y) = \alpha J_0(\lambda\rho) + \int_0^{z_+} \Phi_1(t)\, J_0\left(\lambda \sqrt{z_-(z_+ - t)}\right) dt + \int_0^{z_-} \Phi_2(t)\, J_0\left(\lambda \sqrt{z_+(z_- - t)}\right) dt, \quad (6)$$

где α — произвольная постоянная; $z_\pm = x \pm iy$; $\lambda = \sqrt{k^2 - \varkappa^2}$; $\rho = |z_\pm|$; Φ_1 и Φ_2 — произвольные голоморфные функции; J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Если E_z не равно тождественно нулю, то решение уравнений Максвелла имеет вид

$$E_{x,y} = \frac{i\varkappa}{\varkappa^2 - k^2} \left\{e^{i\varkappa z} - R(\varkappa)\, e^{i\varkappa z}\right\} \frac{\partial g_z}{\partial x,\ y}, \quad (7)$$

$$E_z = \left(e^{-i\varkappa z} + R(\varkappa)\, e^{i\varkappa z}\right) g_z, \qquad R(\varkappa) = \frac{1 - \dfrac{k}{\varkappa\sqrt{\varepsilon}} \left(1 + \dfrac{\varkappa^2 - k^2}{k^2\varepsilon}\right)^{1/2}}{1 + \dfrac{k}{\varkappa\sqrt{\varepsilon}} \left(1 + \dfrac{\varkappa^2 - k^2}{k^2\varepsilon}\right)^{1/2}}.$$

Если же E_z — тождественный нуль, то

$$E_{x,y} = \left(e^{-i\varkappa z} + P(\varkappa)\, e^{i\varkappa z}\right) g_{x,y}, \qquad P(\varkappa) = \frac{1 - \dfrac{k}{\varkappa}\sqrt{\varepsilon}\left(1 + \dfrac{\varkappa^2 - k^2}{k^2\varepsilon}\right)^{1/2}}{1 + \dfrac{k}{\varkappa}\sqrt{\varepsilon}\left(1 + \dfrac{\varkappa^2 - k^2}{k^2\varepsilon}\right)^{1/2}}. \quad (8)$$

Для плоских волн формулы (6) и (7) переходят в обычные формулы для вертикальной и горизонтальной поляризаций. Величины $R(\varkappa)$ и $P(\varkappa)$ имеют смысл коэффициентов отражения. Как видно из формулы (6), класс решений, для которых граничная задача решается введением коэффициентов отражения, не исчерпывается плоскими волнами, потому что даже в рассматриваемом частном случае определяется двумя произвольными функциями. Естественно, что вопрос о возбуждении поля, описываемого заданием конкретного вида α, Φ_1 и Φ_2, в каждом случае должен решаться особо.

Заметим, что, зная решения однородного волнового уравнения с граничными условиями (1)—(3), можно обычными методами математической физики решить волновое уравнение с правой частью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Г. Басс, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 3, 389.
2. И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, ГТИ, 1948.

Институт радиофизики
и электроники АН УССР

Поступило в редакцию
30 IV 1960

Примечание при корректуре

Легко показать, что полученные граничные условия имеют место и для неровной поверхности и ε, зависящего от координат, если выполнены следующие неравенства

$$\left|\frac{\nabla\varepsilon}{k\varepsilon^{3/2}}\right| \ll 1, \quad R \gg \left|\frac{1}{k\sqrt{\varepsilon}}\right|,$$

где R — радиус кривизны поверхности.

ОБ ОЦЕНКЕ ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКАХ

Л. Э. Бахрах

С точки зрения предлагаемого ниже упрощенного метода рассмотрим вопрос об ионной фокусировке электронного потока и бриллюэновом потоке с учетом тепловых скоростей.

1. ИОННО-СФОКУСИРОВАННЫЙ ПУЧОК

Ионная фокусировка электронных пучков рассмотрена в ряде работ [1—3]. Сущность этого вида фокусировки состоит в том, что ионы, возникающие в газе при прохождении электронного пучка, накапливаются на пути последнего, образуя шнур положительного пространственного заряда, притягивающий электроны к оси и обеспечивающий, таким образом, фокусировку электронного потока.

Для ионно-сфокусированного цилиндрического электронного потока радиуса r, движущегося вдоль оси z, уравнение радиального движения граничного электрона

можно представить в виде

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = f_+ + f_- + p_1,$$

где f_+ — фокусирующая сила положительных ионов; f_- — дефокусирующая сила кулоновского расталкивания электронов пучка; p_1 — сила, обусловленная поперечными тепловыми скоростями электронов в потоке; m — масса электрона.

На основании сделанных выше предположений можно легко определить f_+ и f_-, пользуясь теоремой Гаусса:

$$f_+ = -e\frac{\rho_+ r}{2\varepsilon_0}, \quad f_- = e\frac{\rho_- r}{2\varepsilon_0} = e\frac{I}{2\pi r v \varepsilon_0}, \tag{1}$$

где ρ_+ и ρ_- — средняя плотность положительных ионов и электронов в пучке; I — сила тока пучка; $v = \sqrt{\frac{2e}{m}U}$ — аксиальная скорость электронов; U — ускоряющее напряжение; e — заряд электрона; ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Что касается рассеивающей силы p_1, обусловленной тепловым движением электронов, то ее можно рассчитать следующим образом. Примем, что давление электронного газа $P = nkT$, где n — концентрация электронов в потоке; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура. Тогда сила, действующая на поверхность пучка радиуса r и длины l, будет равна $P2\pi rl$. Относя эту силу к одному электрону, получим

$$p_1 = \frac{2kT}{r}. \tag{2}$$

Заметим, что введение силы p_1, определяемой уравнением (2), может быть до некоторой степени обосновано, если рассматривать электронный пучок как некоторую систему N материальных точек, условие равновесия которой под действием активных сил $\bar{F}_i$ и сил инерции $\bar{f}_i$ определяется уравнением Д'Аламбера — Лагранжа

$$\sum_{i=1}^{N}(\bar{F}_i - \bar{f}_i)\,\delta\bar{r}_i = 0.$$

В нашем случае цилиндрического пучка поверхности S, находящегося под действием сил, обусловленных поперечными тепловыми скоростями электронов, можно считать, что

$$\sum_{i=1}^{N}\bar{F}_i\delta\bar{r}_i = PS\delta r.$$

Если также принять, что $\bar{f}_i$ и $\delta\bar{r}_i$ одинаковы для всех точек системы, то

$$\sum_{i=1}^{N}\bar{f}_i\delta\bar{r}_i = nVf\delta r = PS\delta r,$$

где V — объем рассматриваемой части потока.

Отсюда имеем соотношение, аналогичное (2):

$$f = \frac{PS}{nV} = \frac{2kT}{r}.$$

Примем в качестве уравнения состояния газа уравнение адиабаты и воспользуемся условием адиабатичности [2], которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\varphi_T}{n} = \text{const},$$

где $\varphi_T = kT/e$. Так как n пропорционально r^{-2}, то можно написать

$$\varphi_T r^2 = \varphi_{T\text{к}} r_\text{к}^2 = \text{const}, \tag{3}$$

где $\varphi_{T\text{к}} = kT_\text{к}/e$; $T_\text{к}$ — температура катода; $r_\text{к}$ — радиус, характеризующий положение электрона на катоде.

Принимая во внимание соотношения (1), (2) и (3), уравнение движения граничного электрона будет

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{e\rho_+ r}{2\varepsilon_0} + \frac{cI}{2\pi r v \varepsilon_0} + e\frac{2\varphi_{T\,к} r_к^2}{r^3}.$$

Полагая $v = \text{const}$, последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{\rho_+ r}{4U\varepsilon_0} + \frac{I}{4\pi r v U \varepsilon_0} + \frac{\varphi_{T\,к} r_к^2}{Ur^3}. \qquad (4)$$

Полученное уравнение (4) полностью совпадает с дифференциальным уравнением для эффективного радиуса потока при ионной фокусировке, полученным более строгим методом [2].

Следует также заметить, что применение описанного метода рассмотрения к случаю ионной фокусировки ленточного пучка приводит к результатам, аналогичным результатам более строгого расчета.

2. БРИЛЛЮЭНОВ ПОТОК

Рассмотрим вопрос о влиянии тепловых скоростей в бриллюэновом потоке электронов, движущемся вдоль оси z. Как известно [4], радиальное уравнение движения граничного электрона пучка в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \eta\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 r v^3} - r\left(\frac{\eta}{2}\frac{B}{v}\right)^2, \qquad (5)$$

где I — сила тока пучка; v — его скорость; B — магнитная индукция; η — отношение заряда электрона к его массе. Равновесный бриллюэнов радиус может быть найден из условия $\frac{d^2r}{dz^2} = 0$ и равен

$$r_l^2 = \frac{\sqrt{2}\,I}{\pi\varepsilon_0\eta^{3/2}B^2U^{1/2}}.$$

Для оценки влияния тепловых скоростей на фокусировку пучка добавим в правую часть уравнения (5) дефокусирующую силу $f = 2kT/r$, обусловленную наличием тепловых скоростей. Принимая, как и ранее, в качестве уравнения состояния газа уравнение адиабаты и воспользовавшись условием адиабатичности $\varphi_T/n = \text{const}$, получим уравнение движения граничного электрона пучка в виде

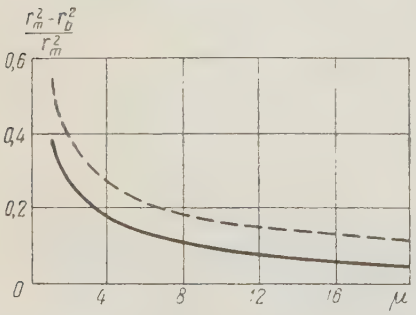
$$\frac{d^2r}{dz^2} = \eta\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 r v^3} - r\left(\frac{\eta}{2}\frac{B}{v}\right)^2 + \frac{\varphi_{T\,к} r_к^2}{Ur^3}. \qquad (6)$$

Если в уравнении (6) положить $d^2r/dz^2 = 0$, то можно определить так называемый равновесный радиус потока r_m с учетом оценки влияния тепловых скоростей. Для этого радиуса получаем

$$r_m^4 - r_b^2 r_m^2 - \frac{1}{\mu}r_b^4 = 0,$$

где

$$\mu = \frac{Ie}{kT_к v}\frac{r_b^2}{r_к^2} = 1{,}76\cdot10^8\frac{I}{T_к\sqrt{U}}\frac{r_b^2}{r_к^2}.$$



Из последнего соотношения следует, что

$$r_m^2 = \frac{r_b^2}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{\mu}}\right). \qquad (7)$$

Полученное уравнение (7) в предположении о равномерном распределении плотности электронов в пучке позволяет оценить часть полного заряда пучка, выходящую благодаря рассеивающему действию тепловых скоростей за пределы бриллюэнова радиуса. Эта часть заряда пучка, очевидно, равна

$$\frac{r_m^2 - r_b^2}{r_m^2} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{\mu}}\right)}. \qquad (8)$$

На основании уравнения (8) на рисунке сплошной кривой представлена зависи-сть части тока пучка, находящейся вне бриллюэнова радиуса, от величины парамет-μ. На этом же рисунке пунктирной кривой изображены данные более строгого рас-а Пирса и Уолкера [5]. Сопоставление этих кривых показывает их удовлетворитель-е согласование.

Рассмотрение ионно-сфокусированного и бриллюэнова потока позволяет пола-ть, что указанный метод оценки влияния тепловых скоростей электронов в пучках жет быть успешно применен и в ряде других случаев.

Выражаю благодарность П. В. Голубкову и А. М. Алесковскому за ценную дис-ю ию.

ЛИТЕРАТУРА

O. Scherzer, Z. Phys., 1933, 82, 6, 693.

Б. И. Давыдов, С. И. Брагинский. К теории газовой концентрации электронных пучков. Сб., посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе, Изд. АН СССР, 1950, 72—91.

М. М. Бредов, Автоматическая компенсация объемного заряда в электронных пучках, Сб., посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе, Изд. АН СССР, 1950, 155—172.

Дж. Р. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, перев. с англ., Изд. Советское радио, 1956, 154—160.

J. Pierce, L. Walker, «Brillouin flow» with thermal velocities, J. Appl. Phys., 1953, 24, 10, 1328.

Поступило в редакцию
25 IV 1960

К РАСЧЕТУ ТРУБЧАТЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

Н. Д. Порев

При переходе от сплошных цилиндрических электронных пучков к трубчатым обыч-возникают три вопроса.

1. Сколь сильно изменятся силы расталкивания, а следовательно, и необходи-е для формирования величины магнитной индукции.

2. Насколько эффективнее станет взаимодействие пучка с СВЧ-полем.

3. Как изменится плотность тока эмиссии с катода.

Положим ток пучка I и внешний радиус $r_в$ постоянными и рассмотрим изменение ойств пучка с изменением радиуса внутренней полости $r_а$, а следовательно, «трубча-сти» $T = r_а/r_в$.

1. Наиболее полно силы расталкивания, действующие на граничный электрон, следованы в [1]. Однако применение рядов и учет эффектов второго порядка делают зультаты этой работы труднообозримыми. В то же время, достаточно важные результы при обычно принимаемых пренебрежениях можно получить, предположив, что отность объемного заряда ρ не изменяется по сечению пучка.

В этом случае сила расталкивания, действующая на граничный электрон, представ-ется выражением

$$F = \frac{e\rho}{2\varepsilon r_в}(r_в^2 - r_а^2) = \frac{eI}{2\pi\varepsilon z r_в}, \qquad (1)$$

е. при заданном токе сила расталкивания, действующая на внешний граничный ктрон, а следовательно, и магнитное поле, необходимое для формирования, не за-ят от трубчатости пучка.

2. Довольно полно взаимодействие пучка с СВЧ-полем характеризуется парамет-усиления [2]

$$C = \sqrt[3]{\frac{KI}{4U_0}}. \qquad (2)$$

В первом приближении изменение осевой составляющей поля по радиусу при ичии пучка можно считать, как и для «холодной» замедляющей системы, соот-ствующим выражению

$$E_z(r) = AJ_0(\gamma r). \qquad (3)$$

Учитывая соотношения [2]

$$K = \frac{E_z^2}{2\beta^2 P}, \tag{4}$$

$$C^3 = \frac{IE_z^2}{8U_0\beta^2 P} = \frac{A^2 I J_0^2(\gamma r)}{8U_0\beta^2 P} \tag{5}$$

и разбивая пучок на кольцевые элементы с неизменными $E_z(r)$ и плотностями тока $j = \rho\dot{z}$, получаем

$$C^3 = \frac{A^2}{8U_0\beta^2 P}\int_{r_a}^{r_в} J_0^2(\gamma r)\,\rho\dot{z}2\pi r\,dr. \tag{6}$$

Условие равенства токов требует

$$I = (r_в^2 - r_a^2)\,\pi\rho\dot{z} = \text{const}. \tag{7}$$

Для сплошного пучка $r_a = 0$. Тогда

$$\frac{C_т^3}{C_{сп}^3} = \frac{\rho_т \int\limits_{r_a}^{r_в} J_0^2(\gamma r)\,r\,dr}{\rho_{сп}\int\limits_0^{r_в} J_0^2(\gamma r)\,r\,dr} = \frac{r_в^2}{r_в^2 - r_a^2}\,\frac{\int\limits_{r_a}^{r_в} J_0^2(\gamma r)\,r\,dr}{\int\limits_0^{r_в} J_0^2(\gamma r)\,r\,dr}. \tag{8}$$

Оценим результаты в областях, где применимы аппроксимации модифицированных цилиндрических функций. При малых $\gamma r\,J_0(\gamma r) \simeq 1$ и

$$\frac{C_т^3}{C_{сп}^3} = \frac{r_в^2}{r_в^2 - r_a^2}\,\frac{\int\limits_{r_a}^{r_в} r\,dr}{\int\limits_0^{r_в} r\,dr} = 1, \tag{9}$$

что физически хорошо интерпретируется, поскольку СВЧ-поле в этом приближении не меняется в границах пучка.

Для больших $\gamma r\,J_0(\gamma r) = e^{\gamma r}/\sqrt{2\pi\gamma r}$ и

$$\frac{C_т^3}{C_{сп}^3} = \frac{r_в^2}{r_в^2 - r_a^2}\,\frac{\int\limits_{r_a}^{r_в} e^{2\gamma r}\,dr}{\int\limits_0^{r_в} e^{2\gamma r}\,dr} = \frac{1}{1 - T^2}\,\frac{e^{2\gamma r_в} - e^{2\gamma r_a}}{e^{2\gamma r_в} - 1}. \tag{10}$$

Более строго было бы применить в границах интегрирования две аппроксимации, разбив интеграл на две части, но это не меняет существенно результат.

3. Площадь катода в трубчатом пучке уменьшается в

$$\frac{\pi r_в^2}{\pi(r_в^2 - r_a^2)} = \frac{1}{1 - T^2} \tag{11}$$

раз, а плотность тока эмиссии во столько же раз растет.

Численные расчеты, выполненные для ряда практически интересных случаев ($2\gamma r_в \simeq 6{,}5$), дают следующие порядки величин:

T	0,4	0,6	0,8	0,9
$\frac{C_т}{C_{сп}}$	1,08	1,14	1,27	1,37
$\frac{j_т}{j_{сп}}$	1,19	1,56	2,78	5,27

Существенное увеличение параметра усиления проявляется лишь при большой рубчатости, но при этом весьма резко растет и требуемая плотность тока эмиссии. Следовательно, с этой точки зрения целесообразно использовать лишь пучки с большой трубчатостью, однако это возможно только при достаточной удельной эмиссии катода.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. A. Harris, Proc. I.R.E., 1952, **40**, 6, 700.
2. Дж. Р. Пирс, Лампа с бегущей волной, перев. с англ. под ред. В. Т. Овчарова, Изд. Советское радио, 1952.

Поступило в редакцию
7 VI 1960

АНАЛИЗАТОР ПОЛЯРИЗАЦИИ

В. А. Либин

ВВЕДЕНИЕ

При исследованиях поляризационных характеристик электромагнитного поля антенных систем, отдельных излучателей, поляризационных решеток, элементов волноводных трактов и т. п., а также при изучении эффектов изменения поляризационных параметров поля при распространении через анизотропную среду и в ряде других случаев бывает необходимо по известным характеристикам двух ортогональных полей — их относительным фазам и амплитудам — определить параметры эллипса поляризации: коэффициент эллиптичности M (по мощности) и угол наклона большой оси β. Обычно при решении подобной задачи приходится либо заниматься расчетами, либо пользоваться диаграммой, описанной в [1]. Второй способ более предпочтителен, однако эта диаграмма имеет определенные недостатки, например, необходимость пользования дополнительной линейкой. Кроме того, представляется целесообразным иметь диаграмму для анализа поляризации, однотипную с диаграммой согласования поляризаций, описанной в [2], т. е. в виде полярной диаграммы. Это позволит объединить обе диаграммы в одну и при ее помощи решать большинство практических задач по поляризации.

Описанная ниже диаграмма, названная анализатором поляризации, выполнена в виде сектора круга и должна служить дополнением к диаграмме согласования поляризаций.

1. ВЫВОД СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Пусть имеется электромагнитное поле, эллиптичность которого (по мощности) равна M. На рис. 1 условно в фазе показаны векторы напряженности электрического поля, параллельные большой и малой осям поляризационного эллипса.

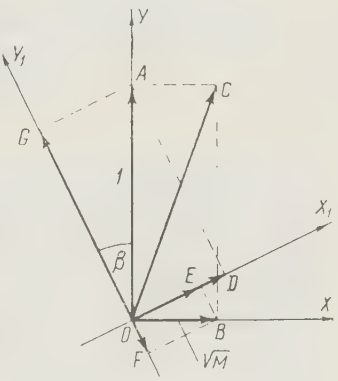


Рис. 1

Амплитудные значения векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, отнесенные к $|\overrightarrow{OA}|$, равны, соответственно, 1 и $\sqrt{M}$. Мгновенные значения этих векторов (здесь и везде далее нормированных относительно $|\overrightarrow{OA}|$):

$$|OA| = \sin \omega t, \quad |OB| = \sqrt{M} \cos \omega t$$

(при обратном направлении вращения поля $|OA| = \cos \omega t$, $|OB| = \sqrt{M} \sin \omega t$).

Для определения связи между относительными амплитудами и фазами двух ортогональных составляющих того же поля, развернутых на угол β относительно осей поляризационного эллипса, и величиной эллиптичности M и углом β необходимо найти суммы проекций этих составляющих на оси поляризационного эллипса или, наоборот, спроектировать векторы полей, параллельных большой и малой осям эллипса, на направления, составляющие угол β с этими осями.

Находя затем суммы проекций векторов, можно определить и их относительные амплитуды и фазы.

Проекции на направления Y_1 и X_1:

$$OG = |OA| \cos \beta = \cos \beta \sin \omega t, \quad OF = -|OB| \sin \beta = -\sqrt{M} \sin \omega t,$$

$$OD = |OA| \sin \beta = \sin \beta \sin \omega t, \quad OE = |OB| \cos \beta = \sqrt{M} \cos \beta \cos \omega t.$$

Сумма проекций на ось X_1:

$$OD + OE = \sin\beta \sin\omega t + \sqrt{M}\cos\beta\cos\omega t = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

где

$$A_1 = \sqrt{\sin^2\beta + M\cos^2\beta}; \quad \varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}[\sqrt{M}\operatorname{ctg}\beta].$$

Сумма проекций на ось Y_1:

$$OG + OF = \cos\beta \sin\omega t - \sqrt{M}\sin\beta\cos\omega t = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2),$$

где

$$A_2 = \sqrt{\cos^2\beta + M\sin^2\beta}; \quad \varphi_2 = \operatorname{arc\,tg}[-\sqrt{M}\operatorname{tg}\beta].$$

Относительная амплитуда сумм проекций:

$$\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{\sin^2\beta + M\cos^2\beta}{\cos^2\beta + M\sin^2\beta}}.$$

Отношение мощностей, переносимых соответствующими полями:

$$N = \frac{P_1}{P_2} = \left[\frac{A_1}{A_2}\right]^2 = \frac{\sin^2\beta + M\cos^2\beta}{\cos^2\beta + M\sin^2\beta}. \qquad (1)$$

Фазовый сдвиг между ортогональными составляющими:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \operatorname{arc\,tg}[\sqrt{M}\operatorname{ctg}\beta] - \operatorname{arctg}[-\sqrt{M}\operatorname{tg}\beta] = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\sqrt{M}}{(1-M)\sin 2\beta}\right]. \qquad (2)$$

2. ПОЛЬЗОВАНИЕ АНАЛИЗАТОРОМ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Графически каждому из уравнений (1) и (2) соответствует свое семейство кривых. Совместное решение (1) и (2) при двух заданных параметрах, например N и $\Delta\varphi$, дает искомые значения M и β.

На рис. 2 в полярной системе координат построены кривые по формулам (1) и (2). В обоих семействах кривых в качестве параметра выбрана эллиптичность M. Значение N (или $\Delta\varphi$) определяется длиной радиуса-вектора, проведенного под заданным углом β до кривой, соответствующей заданной величине M.

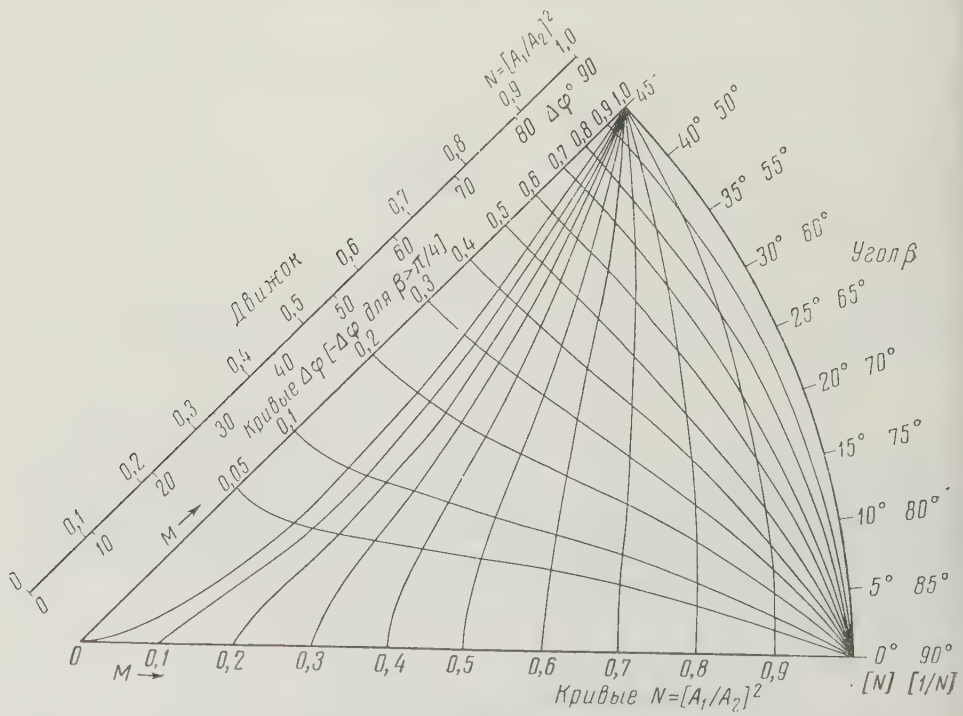


Рис. 2

Из (1) легко видеть, что $N(\beta) = \frac{1}{N}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, откуда следует, что диаграмма может ыть построена в секторе $\pi/4$, причем для углов $\beta > \pi/4$ надо брать величины, обратные N. Аналогичный вывод можно сделать и относительно (2), с той лишь разницей, что для $> \pi/4$ фазовый угол $\Delta\varphi$ будет отрицательным.

Для быстрого определения искомых величин анализатор поляризации имеет поворотный движок со шкалами $\Delta\varphi$ и N.

Пользование анализатором поляризации сводится к следующему.

1. Если заданы β и M: а) повернуть движок на угол β; б) найти точку пересечения движка с кривой из семейства $\Delta\varphi$, соответствующей заданной величине M; в) прочесть по шкале движка искомое значение $\Delta\varphi$; г) аналогичным образом найти N.

2. Если заданы N и $\Delta\varphi$: а) найти на движке точки заданных N и $\Delta\varphi$; б) вращать движок до совмещения этих точек с кривыми N и $\Delta\varphi$ соответственно, построенными при одинаковом значении параметра M; в) полученные при этом β и M и есть искомые. Нетрудно также определить искомые величины и при любых других двух заданных.

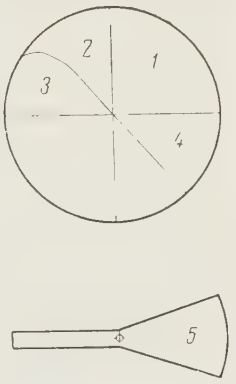


Рис. 3

Выше указывалось на желательность объединения диаграммы согласования поляризаций с описанным анализатором поляризации. На рис. 3 показана примерная схема построения такой диаграммы. Здесь *1* — диаграмма согласования поляризаций; *2* — семейства вспомогательных кривых для согласных поляризаций; *3* — то же для несогласных поляризаций; *4* — анализатор поляризации; *5* — поворотный масштабный движок.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Morgan, W. Evans, Proc. I.R.E., 1951, 39, 5, 552.
2. В. А. Либин, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 11, 1786.

Поступило в редакцию
7 X 1960

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ФЕРРИТОВ ДЛЯ АБСОЛЮТНОГО ИЗМЕРЕНИЯ МОЩНОСТИ СВЧ

Г. Б. Богданов

Целью данной работы является определение свойств марганцевого феррита как ферримагнитного полупроводникового термистора, который можно было бы применить для абсолютного измерения мощности СВЧ в известных мостовых схемах.

Возможность такого применения обусловлена зависимостью электросопротивления ферритов от температуры и сильным (свыше 100° С) нагревом образца феррита в результате поглощения больших уровней мощности СВЧ при ферримагнитном резонансе. Зависимость электросопротивления феррита от температуры описывается функцией вида [1]

$$R_{\Phi} = Ae^{\Delta E/kT}, \tag{1}$$

где ΔE — энергия активации; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура; A — постоянный коэффициент, имеющий размерность в омах.

Энергия активации не является постоянной величиной и принимает различные значения для разных температур [1]. Отвлекаясь от микроскопических процессов, происходящих в феррите при нагреве, энергию активации ΔE можно считать постоянной усредненной величиной в интервале температур от комнатной (23° С) до точки Кюри. Такое допущение приемлемо для технических расчетов обычных (не обладающих ферримагнитными свойствами) полупроводниковых термисторов [2]. Ниже показано, что для ферримагнитных полупроводниковых термисторов это допущение остается справедливым. С учетом данного допущения формулу (1) можно представить в виде

$$R_{\Phi} = Ae^{B/T},$$
$$B = \frac{\Delta E_{\text{ср}}}{k} = \text{const}, \tag{2}$$

где

т. е. коэффициент B характеризует отношение усредненной величины энергии активации $\Delta E_{\text{ср}}$ к постоянной Больцмана и имеет размерность в градусах Кельвина.

Так как при поглощении больших уровней мощности СВЧ при ферримагнитном резонансе феррит сильно нагревается, то электросопротивление феррита будет уменьшаться с увеличением поглощаемой мощности. Связь между электросопротивлением феррита и поглощаемой мощностью СВЧ при этом будет определяться соотношением

$$R_Ф = Ae^{B/T+cP_Ф}, \quad (3$$

где c — постоянный коэффициент, имеющий размерность в градусах Кельвина на ватт; $P_Ф$ — мощность, поглощаемая ферритом при ферримагнитном резонансе. Мощность $P_Ф$ определяется из соотношения вида

$$P_Ф = F\frac{\omega V_Ф M_0 h^2}{2\Delta H}, \quad (4$$

где F — коэффициент, зависящий от формы образца феррита; ω — частота колебаний внешнего магнитного поля СВЧ; h — амплитуда внешнего магнитного поля СВЧ; M_0 — намагниченность насыщения; $V_Ф$ — объем образца феррита; $2\Delta H$ — ширина линии поглощения. Необходимо отметить, что при работе с большими мощностями СВЧ из-за нагрева образца на величине $P_Ф$ сильно сказывается зависимость M_0 и $2\Delta H$ от температуры. Так, например, мощность, поглощаемая в ферримагнитном резонансе при 23° С марганцевым ферритом в форме диска, уменьшается на 20—30% при нагреве образца до 150° С. Поэтому для точных расчетов величины $P_Ф$ нельзя не учитывать температурных зависимостей M_0 и $2\Delta H$.

Для исследования был выбран феррит марганца, так как он обладает наиболее высокой электропроводностью по сравнению с ферритами, применяемыми в настоящее время в технике СВЧ, и поэтому более удобен.

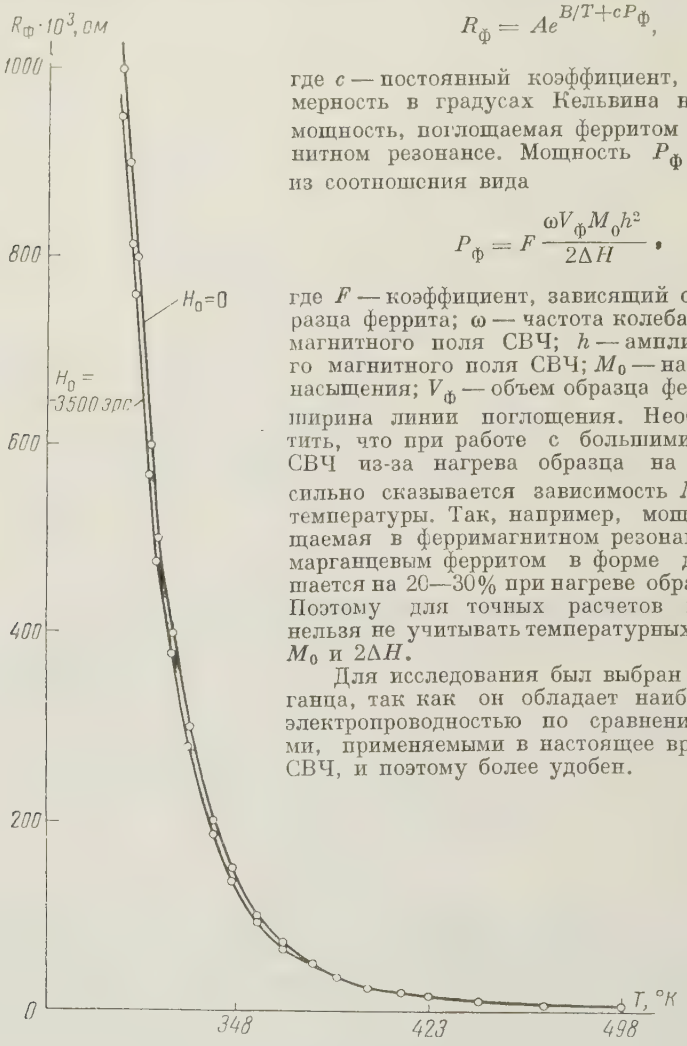


Рис. 1. Зависимость электросопротивления феррита марганца от температуры для различных значений намагничивающего поля H_0

Все исследования (за исключением определения зависимости электросопротивления феррита $R_Ф$ от поглощаемой мощности $P_Ф$) проводились с образцом, который имел форму цилиндра высоты 2,7 *мм* и диаметра 2,6 *мм*. Электросопротивление этого образца при комнатной температуре составляло $1{,}1 \cdot 10^6$ *ом*. На торцовые поверхности цилиндра вжиганием серебряной пасты наносились контакты, к которым припаивались проводнички из тонкой медной проволоки для подключения прибора, измеряющего электросопротивление феррита.

Для определения зависимости электросопротивления феррита от поглощаемой мощности применялся образец феррита в форме диска диаметра 6 *мм* и толщины 0,8 *мм*. Электросопротивление этого образца при комнатной температуре составляло $1{,}55 \cdot 10^5$ *ом*. Контакты наносились на плоские поверхности диска.

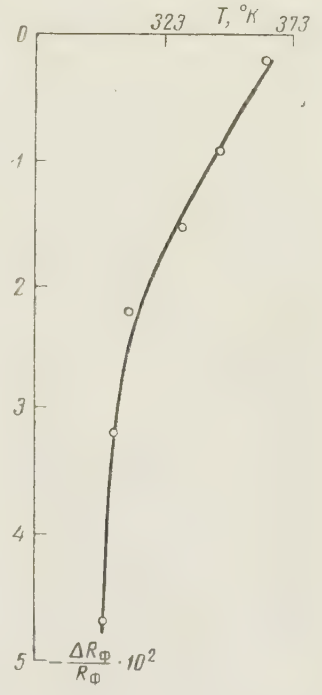
На цилиндрическом образце исследовалась электропроводность феррита в зависимости от температуры T и постоянного подмагничивающего поля H_0 (гальваномагнитный эффект), а также получена статическая вольтамперная характеристика феррита.

Результаты экспериментального исследования зависимости $R_\Phi = f(T)$ при подничивающем поле $H_0 = 0$ и $H_0 = 3500$ *эрс* представлены на рис. 1.

Кривые $R_\Phi = f(T)$, представленные на рис. 1, типичны для полупроводниковых мисторов и отличаются тем, что электросопротивление феррита при комнатной пературе на несколько порядков больше, чем у обычных полупроводниковых мисторов. С учетом допущения $\Delta E_{ср}/k = B$ можно показать, что зависимости $= f(T)$, приведенные на рис. 1, удовлетворительно описываются формулой (2) в интервале ператур от 45 до 200° С, если $A \simeq 1{,}52$, а $\simeq 3950$. Эти коэффициенты определяются по кри- $R_\Phi = f(T)$ и зависят от материала и разме- образца феррита. Зная численное значение эффициента B, можно определить величину $\Delta E_{ср}$ вышеуказанном интервале температур. $\Delta E_{ср}$ дет равна 34 *эв*. Для сравнения отметим, что $_{ср}$, полученная другим путем для монокристаллов рита марганца [1], примерно составляет 27 *эв* в м же интервале температур. Расхождение можобъяснить отличием составов исследуемых ферров, а также различными ошибками измерений.

Приведенное сравнение величин $\Delta E_{ср}$ позволяет итать допущение $\Delta E_{ср}/k = B$ удовлетворительм.

Температурный коэффициент сопротивления $_\Phi/\partial T \simeq \Delta R_\Phi/\Delta T$ (*ом*/° С), определенный по кри- рис. 1 при $H_0 = 0$, снижается от 3,5 до 2,5% и повышении температуры образца феррита от 50 150° С. Отметим, что температурные коэффи-



с. 2. Температурная зависимость продольного льваномагнитного эффекта феррита марганца при намагничивающем поле $H_0 = 3500$ *эрс*

енты сопротивления некоторых обычных полупроводниковых термисторов имеют кие же величины.

Для исследования зависимости электросопротивления феррита от постоянного магничивающего поля цилиндрический образец намагничивался продольным по- $H_0 = 3500$ *эрс*. Электросопротивление феррита при этом понизилось при комнатй температуре почти на 5%, что видно из рис. 2, на котором представлена температурая зависимость продольного гальваномагнитного эффекта феррита марганца при $H_0 = 3500$ *эрс*. Из рис. 2 видно, что продольный гальваномагнитный эффект для феррита рганца имеет отрицательный знак. Этот результат совпадает с данными работы [3]. повышением температуры образца феррита до 100° С и выше до точки Кюри продольй гальваномагнитный эффект становится достаточно малым (изменение $R_\Phi < 1\%$ в раих полях H_0). Это позволяет не учитывать в расчетах гальваномагнитный эффект и работе с большими уровнями мощности. Определение зависимостей $R_\Phi = f(T)$ измерение гальваномагнитного эффекта производились методами, описанными в [3] некоторыми несущественными изменениями.

Статические вольтамперные характеристики феррита при $H_0 = 0$ и $H_0 = 3500$ *эрс* едставлены на рис. 3. Из этих характеристик хорошо видно, что феррит является инейным проводником. Для малых токов с ростом величины тока падение напряжеи на феррите увеличивается. По мере дальнейшего роста величины тока, протекаюго через феррит, напряжение на феррите начинает уменьшаться из-за нелинейности, тсловленной нагревом феррита. Эти нелинейные свойства феррита инерционны льтамперная характеристика необходима для выбора рабочего участка на кривой $= f(I_\Phi)$ и конструирования мостовой схемы.

Форма статической вольтамперной характеристики феррита вполне аналогична овым для обычных полупроводниковых термисторов. Зависимость $R_\Phi = f(P_\Phi)$ комнатной температуре представлена на рис. 4, из которого видно, что с увеличем мощности, поглощаемой ферритом при ферримагнитном резонансе, электросотивление феррита уменьшается.

Зависимость $R_\Phi = f(P_\Phi)$ описывается формулой (3). Коэффициент c легко опреяется по кривой рис. 4 при известных A и B. По этой же кривой определяется

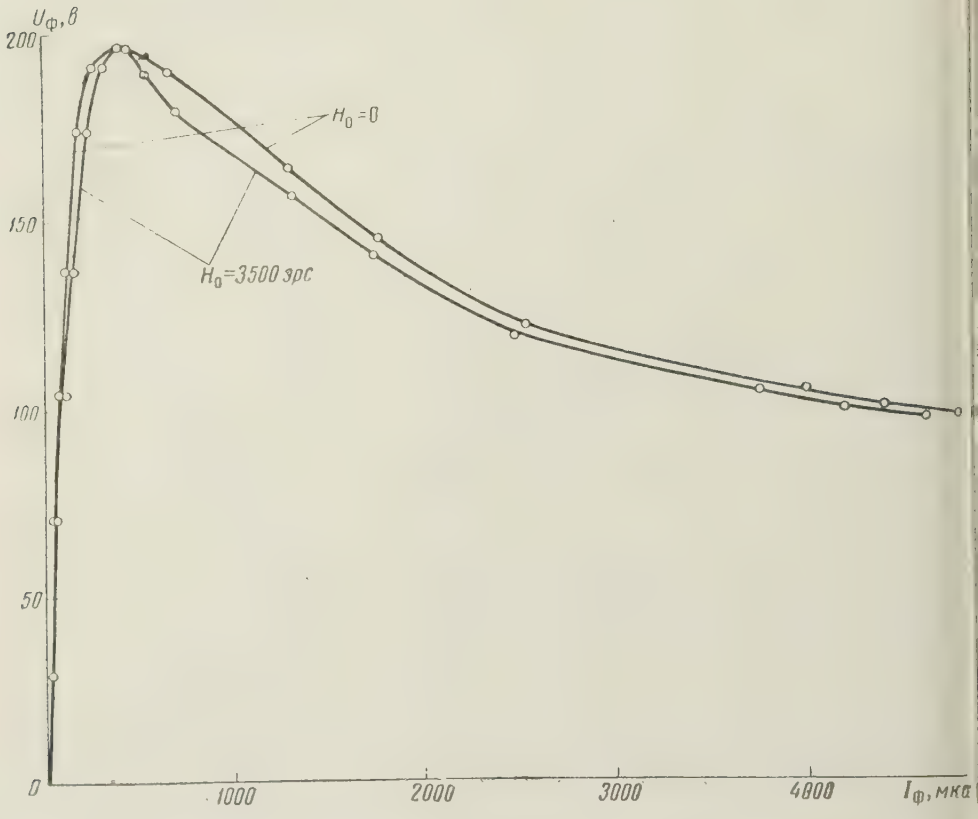


Рис. 3. Статическая вольтамперная характеристика феррита марганца для различны значений намагничивающего поля

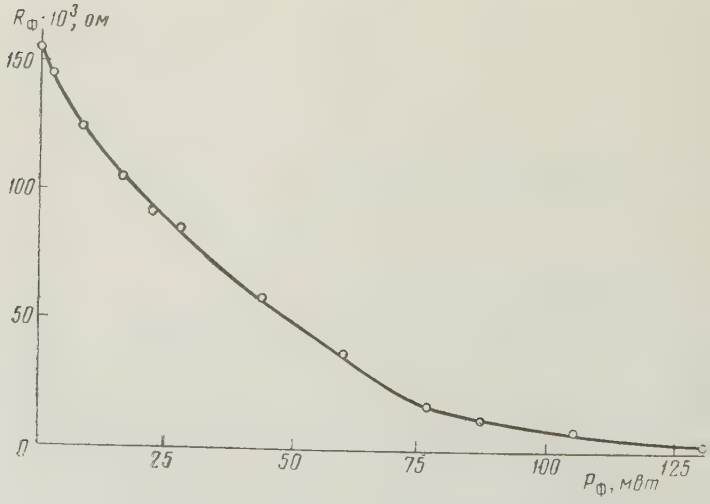


Рис. 4. Зависимость электросопротивления феррита марганца от мощности, поглощаемой при ферримагнитном резонансе, для комнатной температуры

ствительность феррита, характеризующая изменение сопротивления $R_ф$ в омах ри изменении $P_ф$ на 1 *мвт* и определяемая по формуле

$$\eta_ф = \frac{\partial R_ф}{\partial P_ф} \simeq \frac{\Delta R_ф}{\Delta P_ф} \quad ом/мвт.$$

Для данного образца феррита чувствительность в средней области кривой $_ф = f(P_ф)$ при комнатной температуре равна 1400 *ом/мвт*.

Для сравнения отметим, что чувствительность в рабочей точке измерительного рмистора типа Т8М лежит в пределах 66—90 *ом/мвт*.

Зависимость $R_ф = f(P_ф)$ снималась на измерительной установке, блок-схема торой подробно описана в [4]. Отличие состояло в том, что к ферриту, помещенному в прямоугольный резонатор, через отверстия в узкой стенке резонатора присоединялся прибор типа УМ-3 для измерения $R_ф$. При определении $P_ф$ считалось, что вся энергия резонатора поглощается ферритом при ферримагнитном резонансе.

Таким образом, приведенные экспериментальные и расчетные данные характеризуют феррит как ферримагнитный полупроводниковый термистор и подтверждают качественно возможность применения ферритов для абсолютного измерения мощности СВЧ.

Принципиальным отличием ферримагнитного полупроводникового термистора от ычного полупроводникового термистора является то, что первый взаимодействует актически только с магнитным полем СВЧ колебательной системы, а второй — электрическим полем.

Внутри образца феррита не может быть электрического пробоя между частицами, при соответствующем расположении образца в колебательной системе не снижается электрическая прочность последней. Это позволяет использовать ферримагнитный олупроводниковый термистор для измерения больших уровней мощности СВЧ. Принципиальным отличием ферримагнитного полупроводникового термистора является также возможность регулировки чувствительности в рабочей точке путем изменения величины подмагничивающего поля. Это свойство ферримагнитного полупроводникового рмистора позволяет расширить диапазон измеряемых мощностей данным образцом.

Ферримагнитный полупроводниковый термистор в силу своих свойств как бы «защищается» от перегрузок. Это следует из того, что при повышении температуры разца феррита $M_0 \to 0$, а следовательно, и $P_ф \to 0$.

Отсутствие влияния перегрузок — важнейшее достоинство ферримагнитного полупроводникового термистора.

Считаю своим долгом выразить благодарность за обсуждение результатов работы А. Моносову и В. И. Проненко.

ЛИТЕРАТУРА

К. П. Белов, А. А. Попова, Е. В. Талалаева, Электрические и гальваномагнитные свойства монокристаллов марганца, Кристаллография, 1958, 3, 6, 734.

Р. А. Валитов, В. Н. Сретенский, Радиоизмерения на сверхвысоких частотах, Воениздат, 1951.

К. П. Белов, Е. В. Талалаева, Температурная зависимость гальваномагнитного эффекта и электросопротивления в феррите марганца в поли- и монокристаллическом состоянии, ПДВШ (Физико-математические науки), 1958, 2220.

Я. А. Моносов, А. В. Вашковский, Экспериментальное исследование нелинейных явлений в ферритах на СВЧ, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 1, 106.

Поступило в редакцию
29 IX 1960

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ПРЕДЫСТОРИИ НА МАГНИТНУЮ ПРОНИЦАЕМОСТЬ НИКЕЛЬ-ЦИНКОВЫХ ФЕРРИТОВ

Д. Д. Мишин, Л. А. Калягина

ВВЕДЕНИЕ

Совместное влияние температурной и магнитной предысторий на намагниченность галлических ферромагнетиков в слабых и средних полях (температурный магнитный стерезис) подробно исследовано Шуром с сотрудниками [1] и Киренским с сотрудниками [2]. Показано, что температурный магнитный гистерезис существенно зависит напряженности магнитного поля, постоянно действующего при температурном гле, интервала температур температурного цикла, кристаллографического направ-

ления и др. Шуром и Барановой [3] показано, что температурный магнитный гистерез можно объяснить необратимыми процессами смещения границ между доменами под д ствием намагничивающего поля при изменении температуры ферромагнетика. Л. В. И ренский с сотрудниками [2] температурный магнитный гистерезис объясняют необ гимыми процессами перестройки магнитной структуры, происходящими в определ ной области намагничивающих полей. Как следует из вышеприведенных работ, тем ратурный магнитный гистерезис — довольно сложное явление.

Для выяснения некоторых существенных деталей температурного магнитного стерезиса необходимо упростить воздействия на ферромагнетик, например, исключи действие магнитного поля и изучить влияние температурной предыстории на маг ную восприимчивость ферромагнетика. В этом частном случае, обнаруженном на [5], температурный магнитный гистерезис можно назвать температурным гистере сом магнитной структуры, который может наблюдаться по влиянию температур предыстории на магнитную проницаемость ферро- или ферримагнетика. В данной р боте описано влияние температурной предыстории на магнитную проницаемость кель-цинкового феррита марки Ф-1000 при различных по напряженности постоянн и переменных полях.

1. ОБРАЗЦЫ И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Для уменьшения влияния земного магнитного поля образцы никель-цинков феррита марки Ф-1000 были взяты тороидальной формы. Размеры образцов: внешн диаметр 22 *мм*, внутренний диаметр 10 *мм*, высота 7 *мм*.

Измерение магнитной проницаемости производилось мостовым методом с перем ной емкостью на частоте 4,5 *кгц*. Питание моста осуществлялось от звукового гене тора ЗГ-10. Нуль-индикатором служил измерительный усилитель типа 28ИМ на уз полосе пропускания. Нагревание и охлаждение исследуемых образцов с обмотка производились в масляной среде всегда с одной опытно подобранной скоростью, об

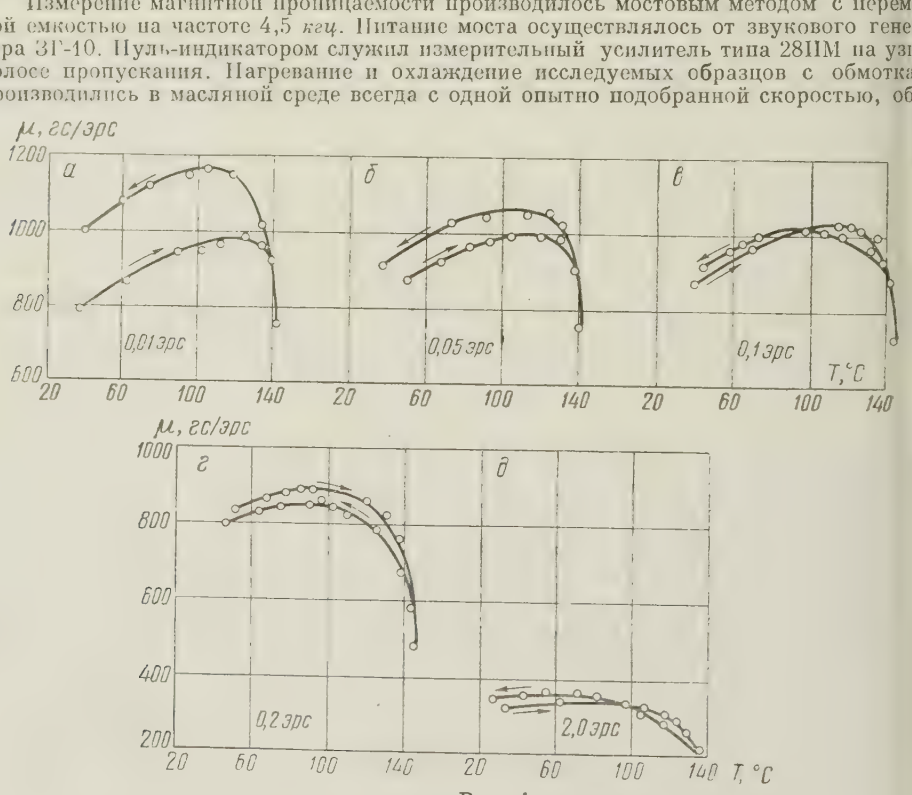


Рис. 1

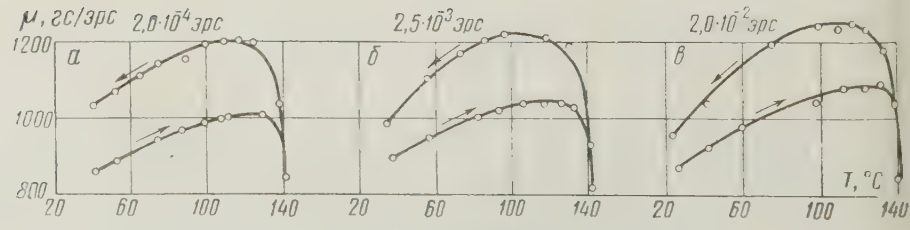


Рис. 2

нивающей полное прогревание образцов. Измерение магнитной проницаемости проводилось при медленном нагревании от 20° С до температуры Кюри (150° С) и последующем медленном охлаждении. Число витков измерительной обмотки — 40, подмагничивающей обмотки — 25. Эффективное значение напряженности магнитного поля, в котором измерялась магнитная проницаемость, менялось от $2{,}0 \cdot 10^{-1}$ до $2{,}0 \cdot 10^{-2}$ *эрс*. Питание подмагничивающей обмотки осуществлялось от сухой высокоомной батареи. Подмагничивающее поле изменялось от 0,01 до 2,0 *эрс*.

Для выяснения влияния числа циклов нагревания — охлаждения на температурный гистерезис магнитной проницаемости последняя измерялась на одном и том же образце при первом, втором, третьем и т. д. циклах до 12-го цикла нагревания — охлаждения.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 1 представлены результаты измерений магнитной проницаемости ферримарки Ф-1000 при нагревании и последующем охлаждении при различных по напряженности подмагничивающих полях. Величины напряженностей подмагничивающих полей указаны на рисунке. Как видно из рис. 1, *а*, наибольший гистерезис имеет место при меньшем подмагничивающем поле (0,01 *эрс*). При увеличении подмагничивающего поля гистерезис уменьшается. При малых подмагничивающих полях 0,01 и 0,05 *эрс* (рис. 1, *а*, *б*) ветвь кривой охлаждения идет выше ветви кривой нагревания. При подмагничивающем поле 0,1 *эрс* (рис. 1, *в*) имеет место пересечение ветвей кривых охлаждения и нагревания. При подмагничивающем поле 0,2 *эрс* (рис. 1, *г*) ветвь кривой охлаждения идет ниже ветви нагревания, а при подмагничивающем поле 2,0 *эрс* (рис. 1, *д*) ветви кривых нагревания и охлаждения при данных условиях измерения практически сливаются. Таким образом, из рис. 1 видно, что постоянное подмагничивающее поле в данном случае только уменьшает гистерезис. Как следует из работы [4], подмагничивающие поля напряженностью до 0,2 *эрс* являются полями, при которых во всем интервале температур идут только обратимые процессы намагничивания, а поля напряженностью порядка 1,0 *эрс* — полями обратимых и необратимых процессов. Таким образом, независимо от того, обратимы или необратимы процессы намагничивания в области данных подмагничивающих полей, от увеличения их напряженности гистерезис только уменьшается.

Порядковый номер цикла	$\mu_1 - \mu_2$	Порядковый номер цикла	$\mu_1 - \mu_2$
1	160	4	90
2	110	5	90
3	100	12	80

Примечание. μ_1 – магнитная проницаемость, измеренная при 100° С при нагревании; μ_2 — магнитная проницаемость, измеренная при 100° С при охлаждении.

На рис. 2, *а*, *б* приведены аналогичные кривые — циклы измерения магнитной проницаемости при нагревании и последующем охлаждении образца марки Ф-1000 в подмагничивающего поля, но при разных эффективных значениях напряженности подмагничивающих полей (их величины указаны на рис. 2), при которых достигалось равновесие мостовой измерительной схемы. Как видно из кривых этого рисунка, при значительном изменении эффективных значений напряженности измерительного поля (от $2 \cdot 10^{-4}$ до $2 \cdot 10^{-2}$ *эрс*) гистерезис магнитной проницаемости изменяется незначительно.

В таблице приведены результаты измерений гистерезиса магнитной проницаемости на одном образце при первом и т. д., пятом и двенадцатом циклах нагревания и охлаждения.

Из таблицы видно, что с увеличением порядкового номера цикла нагревания — охлаждения гистерезис уменьшается, но с нарастанием числа циклов это уменьшение становится незначительным.

Наблюдаемый гистерезис объясняется, по-видимому, температурным гистерезисом доменной структуры феррита, которая необратимо изменяется при нагревании и охлаждении. Необратимые изменения магнитной структуры феррита при нагревании и охлаждении могут происходить как при необратимых процессах смещения границ между доменами [3], так и при процессах перестройки доменной структуры феррита [2].

ЛИТЕРАТУРА

Я. С. Шур, В. И. Дрожжина, ЖЭТФ, 1947, **17**, 6, 607; Я. С. Шур, Н. А. Баранова, ЖЭТФ, 1950, **20**, 2, 183.

Л. В. Киренский, Д. А. Лаптей, А. И. Дрокин, Р. П. Смолин, Физика металлов и металловедение, 1960, 9, 3, 337.

Я. С. Шур, Н. А. Баранова, Докл. АН СССР, 1954, 94, 5, 825.

Д. Д. Мишин, Л. Д. Дробченко, Изв. вузов МВО СССР (Физика), 1960, 4, 131.

Д. Д. Мишин, Н. Г. Пластун, Э. Э. Адамова, 3-е Всесоюзное совещание по физике, физико-химическим свойствам ферритов и физическим основам их применения (Тезисы докладов), Минск, 1959.

Поступило в редакцию
22 VIII 1960

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР МЕДЛЕННЫХ ВТОРИЧНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ АДСОРБЦИИ БЕРИЛЛИЯ НА ВОЛЬФРАМЕ

И. М. Бронштейн, Я. М. Щучинский

1. В [1] показано, что по мере напыления Ba на W вид кривой распределения медленных вторичных электронов по энергиям меняется. Вместо одного максимума, характерного для W, появляются два максимума. С ростом толщины Θ слоя Ba относительная величина первого («вольфрамового») максимума уменьшается, а второго («бариевого») — растет. При $\Theta \simeq 10$ атомным слоям Ba на W первый максимум исчезает, и кривая распределения медленных вторичных электронов по энергиям принимает вид, характерный для массивного слоя Ba. В той же работе [1] кроме того, отмечено, что второй (бариевый) максимум при адсорбции атомов Ba на W смещается в сторону меньших энергий, следуя за изменением эффективной работы выхода мишени, причем положение его окончательно устанавливается при $\Theta \simeq 2$ атомным слоям бария.

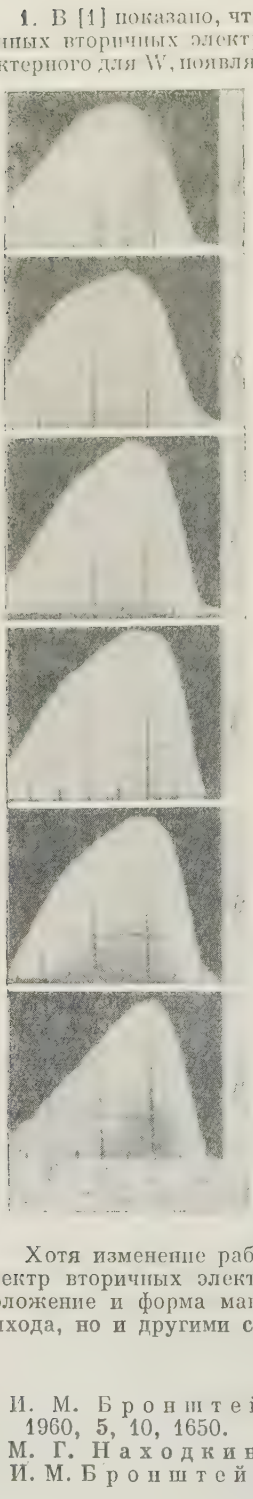


Рис. 1. Изменение низковольтного максимума кривой распределения вторичных электронов по энергиям по мере напыления Be на W:

а — W; *б* — $\Theta \simeq 0{,}3$ атомного слоя; *в* — 1 атомный слой; *г* — 2 атомных слоя; *д* — 6 атомных слоев; *е* — $\gtrsim$ 12 атомных слоев

В настоящей работе приведены энергетические спектры медленных вторичных электронов тонких слоев Be, адсорбированных на W. Вид и положение максимумов кривых распределения медленных вторичных электронов Be и W заметно отличаются друг от друга, в то время как их работы выхода близки ($\varphi_{Be} = 5$ *эв*, $\varphi_W = 4{,}52$ *эв*).

Прибор, техника и методика эксперимента подробно описаны в [1]. Отметим, что кривая $\sigma(E_p)$ для Be, полученная в вакууме, равном $5 \cdot 10^{-9}$ *мм* рт. ст., хорошо совпадает с кривой, полученной в вакууме, достигавшем $\sim 10^{-}$ *мм* рт. ст. [2]. Таким образом, условия вакуума ($p \simeq 10^{-}$ *мм* рт. ст.), при которых производились наши измерения, по-видимому, можно считать приемлемыми.

2. На рис. 1 (*а*—*е*) показана динамика изменения кривых распределения медленных вторичных электронов по энергиям по мере напыления Be на W. Из этих кривых видно, что с ростом Θ положение максимума и форма кривой меняются. Положение максимума кривой, как и при адсорбции Ba, устанавливается уже при $\theta \simeq 2$ атомным слоям, однако относительная доля электронов с энергиями > 3 — 3,5 *эв* при этом еще достаточно велика. При дальнейшем росте Θ полуширина кривой уменьшается, и при $\Theta \geqslant 12$ атомным слоям (рис. 1, *е*) кривая распределения медленных вторичных электронов по энергиям не отличается от таковой для массивного слоя Be.

Таким образом, влияние подложки на вид кривой распределения медленных вторичных электронов по энергиям перестает сказываться при толщине слоя Be $\Theta \simeq 1$ атомным слоям, т. е. при $\Theta = \lambda$ (λ — верхний предел длины пробега медленных вторичных электронов в Be [3]).

Хотя изменение работы выхода, как показано в [1], влияет на энергетический спектр вторичных электронов, из приведенных данных, по-видимому, следует, что положение и форма максимума в данном случае определяются не только работой выхода, но и другими свойствами эмиттера.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Бронштейн, Я. М. Щучинский, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 10, 1650.
2. М. Г. Находкин, В. О. Романовский, Укр. физ. ж., 1954, 4, 3, 47
3. И. М. Бронштейн, Р. Б. Сегаль, Физика твердого тела, 1959, 1, 10, 148

Поступило в редакцию
11 VI 1960

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭМИТТИРОВАННЫХ АВТОЭЛЕКТРОНОВ ПО ЭНЕРГИЯМ ДЛЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

А. Г. Ждан, М. И. Елинсон

В предыдущих работах [1,2] теоретически и экспериментально рассмотрен вопрос лиянии внутреннего электрического поля на автоэлектронную эмиссию полупровод-ков и показано, что при достаточно сильных полях концентрация электронов в зоне роводимости и их распределение по энергиям заметно изменяются сравнительно случаем отсутствия внутреннего поля, вследствие чего эмиссия становится сущест-но неравновесной.

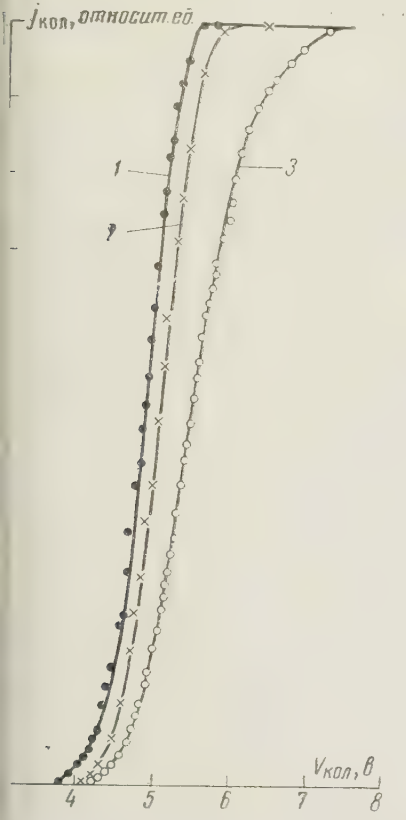


Рис. 1. Кривые задержки в зависи-мости от плотности тока j при комнат-ной температуре:

1 — $j = 66$ *а/см²*; *2* — $j = 125$ *а/см²*; *3* — $j = 362$ *а/см²*

Рис. 2. Кривые задержки в зависи-мости от плотности тока j при 1100°С:

1 — $j = 15$ *а/см²*; *2* — $j = 187$ *а/см²*; *3* — $j = 494$ *а/см²*

Характер изменения функции распределения автоэлектронов по энергиям лучше о проследить посредством измерения спектра эмиттированных автоэлектронов при тичных отбираемых токах.

Нами было проведено измерение спектров для тонких полупроводниковых слоев рца на вольфраме, активированных углеродом (способ получения слоев и их свой-ı см. [2]).

Экспериментальный прибор сходен с прибором, описанным в [3], за исключением соба юстировки и материала коллектора. Сильное диафрагмирование потока элект-ов и исключение паразитных линз обеспечили получение хорошей разрешающей зобности.

На рис. 1 представлены кривые задержки при комнатной температуре для трех чений средней плотности j отбираемого с острия автоэлектронного тока. Из рисунка но расширение кривой задержки с ~1,75 до ~3,25 *эв* при изменении j от 66 до *а/см²*.

При повышении плотности тока в некоторых случаях наблюдалось расширение вых до ~ 7 *эв*.

На рис. 2 представлены кривые задержки для трех значений j при 1100° С. Ха-тер изменения кривых существенно другой: заметно расширение уже при малых

значениях j, но затем ширина кривой изменяется мало. Положение кривых задерж на оси $V_{кол}$ позволяет оценить падение напряжения на слое SiO_2+ C, а следовательн и среднее значение внутреннего поля в слое $E_в$. Значительное расширение спектра н блюдалось при $E_в \simeq 10^4$ *в/см*.

Полученные результаты позволяют сделать несколько важных выводов.

1) Подтверждается существенно неравновесный характер автоэлектронной эми сии высокоомных полупроводников.

2) При внутренних полях $E_в = 10^4$ *в/см* имеет место значительное повышен электронной температуры.

3) С увеличением температуры решетки рост электронной температуры заме ляется.

4) При больших внутренних полях значительное количество эмиттируемых элек ронов проходит над потенциальным барьером.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Елинсон, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 1, 140.
2. М. И. Елинсон, Г. Ф. Васильев, А. Г. Ждан, Радиотехника электроника, 1959, 4, 10, 1718.
3. R. D. Joung, E. W. Müller, Phys. Rev., 1959, 113, 1, 115.

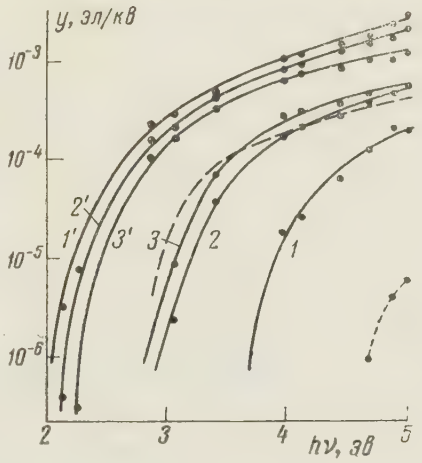
Поступило в редакцию
3 I 1961

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

ФОТОЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ LaB_6

Л. С. Мирошниченко

Согласно литературным данным, интересной особенностью соединения LaB_6 является его металлическая проводимость и малая работа выхода электронов [1] по равнению с обычными металлами. Поскольку у последних работа выхода при помощи дсорбированных молекул BaO снижается на величину порядка 2 –3 *эв*, представляет интерес выяснить возможность такого сни жения и соответствующего сдвига красной раницы фотоэлектронной эмиссии у гек аборида лантана. Известна также большая увствительность LaB_6 к загрязнениям по ерхности остаточными газами [3—4]. По ашим наблюдениям, разница в работах выхода поверхности, свежеочищенной и на одившейся в атмосфере остаточных газов ри $p \simeq 1 \cdot 10^{-8}$ *мм* рт. ст., достигает 0,8 *эв*. бъектом наших опытов были образцы ри различных состояниях поверхности *.



Опыты проводились в отпаянных лам ах, имевших конструкцию, описанную ра ее [2] и позволявшую производить на рев образцов электронной бомбардиров ой. Во время тщательной откачки прибо а образцы прогревались при 1200° С течение ~20 *час*.

Полученные результаты представлены а рисунке, где различным состояниям по ерхности LaB_6 соответствуют спектральные арактеристики квантового выхода эмит ированных фотоэлектронов. Кривая *1* относится к исходному состоянию поверхности бразца, находившегося длительное время в атмосфере остаточных газов при $p \lesssim 1 \cdot 10^{-8}$ *мм* рт. ст.В различной степени очищенные поверхности (прогревом до $t \simeq 1100$°С) арактеризуются кривыми *2* и *3*. Штриховая кривая иллюстрирует данные Лафферти 3]. Определенные из наших данных по методу Фаулера значения работы выхода со ответственно равны 3,55; 2,89 и 2,77 *эв*. Оптимальные покрытия этих исходных поверх остей молекулами окиси бария приводят к сдвигу спектральных характеристик со ответственно в положения *1'*, *2'*, *3'* и к измененным значениям работы выхода: 2,07; ,12 и 2,24 *эв*. Для наилучшей очищенной поверхности получается наименьшее опти альное снижение работы выхода. Это снижение в 0,53 *эв* оказывается очень малым по равнению со снижением работы выхода обычных металлов, таких, как вольфрам, зо ото, тантал и др.

Опыты с предоставленными в наше распоряжение образцами GdB_6 привели к ре ультатам, противоречащим литературным данным. Спектральная характеристика ля очищенной поверхности нашего образца показана на рисунке пунктирной кри ой, по которой работа выхода определяется приблизительно в 4,6 *эв*, вместо указан ого в литературе [1] значения 2,1 *эв*. При помощи BaO работа выхода нашего образ а снижалась несколько больше, чем на 2 *эв*.

Выражаю благодарность П. Г. Борзяку за постоянный интерес и помощь в работе. также Г. В.Самсонову и Ю. Б. Падерно за предоставление образцов для исследования.

ЛИТЕРАТУРА

. Г. В. Самсонов, Успехи химии, 1959, **28**, 189.
. П. Г. Борзяк, О. Г. Сарбей, ЖТФ, 1958, **28**, 1905.
. J. M. Lafferty, J. Appl. Phys., 1951, **22**, 299.
. R. W. Decker, D. W. Stebbnis, J. Appl. Phys., 1955, **26**, 1004.

Институт физики АН УССР

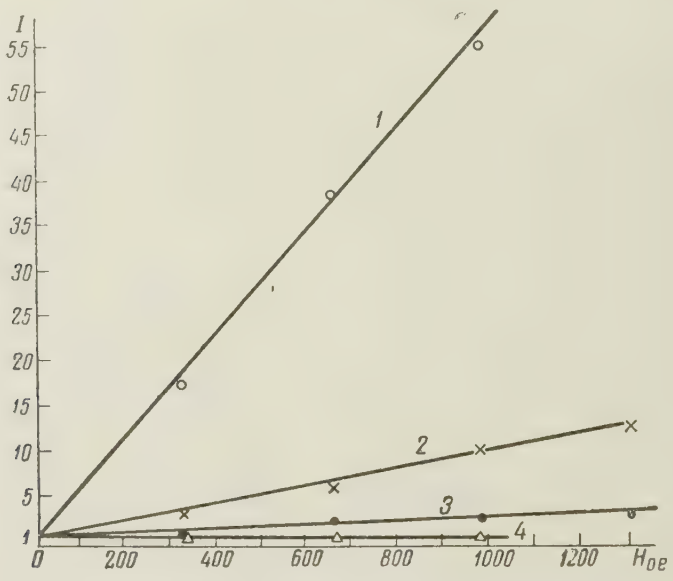
Поступило в редакцию
9 XI 1960

* Изложенные в данном сообщении результаты доложены на Московском Все оюзном совещании по катодной электронике в 1959 г.

РЕКОМБИНАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЦЕЗИЕВОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. М. Алесковский, В. Л. Грановский, Е. Михалец

При наложении продольного магнитного поля на положительный столб разряда низкого давления уменьшается диффузия электронов и ионов к стенкам в направлении, перпендикулярном к полю. Вследствие этого средняя продолжительность жизни носителей заряда в плазме увеличивается; баланс ионов поддерживается при меньшей частоте ионизации (z_i) на 1 электрон в 1 *сек*, а потому в стационарной плазме снижают-



Зависимость интенсивности рекомбинационного излучения от напряженности магнитного поля:

1 — $p = 8{,}2$ *мк* рт. ст.; *2* — $p = 18$ *мк* рт. ст.; *3* — $p = 36$ *мк* рт. ст.; *4* — $p = 74$ *мк* рт. ст.

ся напряженность продольного электрического поля (E_z) и электронная температура (T_e) [1], что наблюдалось экспериментально [2].

В связи с этим можно предполагать, что в магнитном поле увеличивается доля заряженных частиц, исчезающих из плазмы вследствие объемной рекомбинации [3]; абсолютное число актов рекомбинации в 1 $см^3$ за 1 *сек* должно также несколько возрастать *. Однако спектроскопические наблюдения рекомбинационного излучения разряда, проведенные Дэвисом [5], не привели к согласию с указанными выше выводами.

Нами было предпринято изучение влияния магнитного поля на электронную рекомбинацию с излучением в стационарном разряде низкого давления в парах цезия. С этой целью измерялась интенсивность рекомбинационного континуума с пределом 4943° Å, соответствующего захвату электронов на уровень $Cs6P_{1/2}$ [6].

Разрядная трубка диаметра 25 *мм* помещалась в однородное магнитное поле, создаваемое двумя соленоидами. Через зазор между соленоидами в середине трубки излучение разряда выводилось на монохроматор и затем регистрировалось при помощи фотоумножителя или наблюдалось визуально. Величина тока разряда варьировалась от 1 до 2,5 *а*, давление паров цезия — от 2 до 130 *мк* рт. ст.

Установлено сильное влияние магнитного поля на излучение положительного столба. Интенсивность всех эмиссионных линий цезия уменьшается с ростом поля, например, интенсивность дуплета Cs 4555 — 4593 Å падает в 10—15 раз при $H \simeq 1000$ *эрс*. Рекомбинационное свечение, наоборот, возрастает с магнитным полем; этот эффект особенно резко проявляется при низких давлениях. Если при самом низком давлении свечение рекомбинации не воспринимается при наблюдении через спектроскоп даже хорошо адаптированным газом, то включение поля порядка сотни эрстед приводит к появлению отчетливо видимого континуума.

* Как показано в [4], в распадающейся плазме абсолютное число актов рекомбинации может сильно возрастать с ростом магнитного поля.

На рисунке показано изменение интенсивности рекомбинационного излучения зависимости от магнитного поля при различных давлениях паров Cs. На всех ивых положено $I = 1$ при $H = 0$. При расчетах была внесена поправка на рас-нный в оптической системе монохроматора свет яркого дуплета $Cs\ 8^2P_{1/2,\ 3/2} - 6^2S_{1/2}$. ак и следовало ожидать, с ростом давления влияние магнитного поля на рекомнационное свечение плазмы уменьшается, так как уменьшается длина свободного обега электронов и, следовательно, величина $\omega\tau$, определяющая действие магнитго поля на электронные параметры плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

L. Tonks, Phys. Rev., 1939, 56, 360.
R. J. Bickerton, A. Engel, Proc. Phys. Soc. B, 1956, 69, 468.
И. А. Васильева, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 12, 2015.
А. С. Сыргий, В. Л. Грановский, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 9, 1522.
L. W. Davies, Proc. Phys. Soc. B, 1953, 66, 33.
F. L. Mohler, Phys. Rev., 1928, 31, 187.

Физический факультет
Московского государственного
университета им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
5 I 1961

ХРОНИКА

СИМПОЗИУМ ПО ДИФРАКЦИИ ВОЛН

С 26 сентября по 1 октября 1960 г. в Одессе проходил симпозиум по дифракции волн, организованный Комиссией по акустике АН СССР совместно с Акустическим институтом АН СССР и Одесским электротехническим институтом связи, в учебном корпусе которого и проводились заседания. Тематика симпозиума была весьма широкой и охватывала волны самой различной природы, что позволило осуществить интенсивный обмен мнениями между научными работниками разных специальностей при совместном обсуждении родственных проблем.

На пленарных заседаниях были заслушаны в основном обзорные доклады. На первом пленарном заседании, после торжественного открытия симпозиума и вступительного слова В. А. Фока, Г. А. Гринберг сделал обзор работ, выполненных в руководимом им отделе математической физики Ленинградского физико-технического института АН СССР по теории дифракции электромагнитных волн и развитию общих методов математической физики.

На следующих пленарных заседаниях сделали доклады В. А. Фок «Некоторые электродинамические задачи для полого цилиндра конечной длины» (о методах численного решения граничных задач электростатики и электродинамики для трубчатого проводника) и Е. Л. Фейнберг «Проблемы дифракции в физике элементарных частиц» (о дифракционных задачах, возникающих при рассеянии нуклонов в ядрах и взаимном рассеянии протонов, электронов и π-мезонов друг на друге, а также при неупругом рассеянии частиц). В докладе Л. А. Вайнштейна «Электромагнитная дифракция и граничные задачи» дан обзор работ, выполненных в СССР за 1957—1960 гг., и высказано мнение, что теория дифракции в ближайшем будущем будет наиболее интенсивно развиваться, с одной стороны, за счет развития численных методов, опирающихся на современную вычислительную технику, а с другой стороны — за счет асимптотических методов, дающих приближенные и наглядные решения дифракционных задач в «квазиоптической» области, где прямые численные методы неэффективны. Доклад Г. Д. Малюжинца «Идеи Томаса Юнга и асимптотические законы дифракции» посвящен асимптотическому описанию дифракции при помощи параболического уравнения, записанного в лучевых координатах и учитывающего поперечную диффузию волновой амплитуды, и перспективам развития аналитических и счетно-машинных способов решения дифракционных задач.

В обзорном докладе А. С. Алексеева, В. М. Бабича и Б. Я. Гельчинского «Лучевой метод вычисления интенсивности волновых полей» рассмотрены математические проблемы, связанные с этим методом. Доклад Н. Н. Моисеева «Современное состояние и проблемы нелинейной теории поверхностных волн» посвящен гидродинамическим волнам.

Доклад Л. Д. Бахраха и А. А. Пистолькорса «Некоторые задачи теории дифракции, актуальные в антенной технике сантиметровых волн» содержал постановку ряда дифракционных задач, таких, как дифракция сложных волн на «малом» зеркале, излучение антенн, расположенных на проводящем конусе, дифракция и излучение поверхностных волн, влияние антенного обтекателя конической формы на работу антенны и др. В докладе М. Д. Хаскинда «Некоторые задачи дифракции и возбуждения волн на импедансной плоскости» показано, что для двухмерных задач о дифракции и излучении гидродинамических поверхностных волн (эти задачи связаны с гидродинамикой судов на волнении) математическая постановка та же, что и для акустических и электродинамических задач о дифракции и возбуждении волн над импедансной плоскостью, и даны строгие и приближенные решения ряда задач такого типа.

Секционные заседания проводились параллельно в четырех секциях.

А. Строгие и численные решения граничных дифракционных задач. Асимптотические методы в граничных дифракционных задачах.

Б. Нестационарные задачи. Волны Релея. Волны в тяжелой жидкости.

В. Волны в слоистых средах. Решетки и волнистые поверхности. Распространение волн.

Г. Регулярные и периодические волноводы. Нерегулярные волноводы (в этой секции было проведено дополнительное заседание, посвященное дифракции в оптических приборах).

Не имея возможности даже перечислить все секционные доклады и сообщения, становимся лишь на некоторых из них, имея в виду интересы читателей нашего журала.

В докладе Г. Д. Малюжинца и А. А. Тужилина «Электромагнитое поле, возбуждаемое электрическим диполем в клиновидной области с идеально проодящими границами» дано строгое решение задачи в виде интеграла Зоммерфельда, также выведены простые асимптотические формулы для поля на больших расстояниях. [. П. Говорун в своей работе «Об интегральных уравнениях теории антенн» следовал интегральные уравнения для плотности тока на антенне, представляюей собой тело вращения с импедансной поверхностью, и привел численные резульаты, полученные для тонкого цилиндрического вибратора при помощи быстродействующей вычислительной машины. Теории вибраторов был посвящен также доклад .. Я. Уфимцева «Рассеяние плоских волн на тонких цилиндрических проводиках», где результаты, относящиеся к волнам тока в тонких цилиндрических проводиках, полученные методом медленно меняющихся функций, использованы (в сочетаии с простыми физическими соображениями) для расчета характеристик рассеяния ассивных вибраторов.

Известно, что, решив задачу о дифракции единичного скачка или нестационарной олны иного типа, мы получаем возможность не только построить формальное решение адачи о дифракции монохроматической волны, но и найти (эффективно) коротковолновую асимптотику последней задачи. В докладе В. А. Боровикова «Трехерная задача дифракции плоской волны на плоском экране с клиновидным вырезом» естационарная задача о дифракции плоской скалярной волны на плоскости с вырезанным углом $\alpha(\pi/2 < \alpha < 3\pi/2)$ сведена к задаче Дирихле для уравнения Лапласа в граниченной трехмерной области; численное решение этой задачи позволяют найти асимтотические свойства монохроматического дифракционного поля. В докладе А. Я. Повнера и И. В. Сухаревского «Об асимптотических разложениях в неко орых задачах теории дифракции коротких волн» рассмотрена бесконечная область идеально отражающей и достаточно гладкой границей, полностью «освещенной» з источника; асимптотические формулы соответствуют законам геометрической опики или же каустикам различных типов.

Аналогичные результаты для более частной задачи и иным методом получены сообщении Б. Е. Кинбера «Дифракция цилиндрической волны на внутренней ороне кругового цилиндра», где асимптотические формулы содержат многократно раженные лучи, каустики и «волны шепчущей галереи», бегущие по внутренней сторне цилиндра. Во втором сообщении «Приближенное решение задачи о дифракции а параболическом зеркале конечных размеров» Б. Е. Кинбер показал, что в поледовательной теории зеркальных антенн, основанной на концепции дифракционных учей, необходимо учитывать специфику вогнутой поверхности, в частности многократные отражения краевой волны.

В докладах Л. А. Вайнштейна и А. А. Федорова «Рассеяние лоских и цилиндрических волн на эллиптическом цилиндре и концепция дифракционых лучей» и В. И. Иванова «Коротковолновая асимптотика функции Грина ешней задачи для параболических поверхностей» рассмотрены асимптотические аконы дифракции на выпуклых идеально отражающих телах (эллиптический цилиндр, араболоид вращения).

В работе Е. Н. Майзельса и П. Я. Уфимцева «Отражение электромагнитных волн круговой поляризации от металлических тел» показано, что в рассеяном поле можно выделить — как теоретически, так и экспериментально — его «неравомерную» составляющую, обусловленную искривлением (изломом) поверхности.

Доклад Л. М. Бреховскихи В. А. Елисеевнина «О распространении волн в неоднородном волноводе» посвящен распространению звуковых волн слоистой среде частного вида, образующей волновод, свойства которого изменяются доль трассы распространения. В докладах Г. И. Макарова «Распространение отражение радиоволн от ионизированного слоя» и Э. М. Гюннинена и . И. Макарова «Новые асимптотические представления функций Уиттекера ля задач распространения радиоволн» дана асимптотическая трактовка распростраения радиоволн в слоистой ионосфере при $\vec{E}\operatorname{grad}\varepsilon \neq 0$. Тропосферному распространению радиоволн посвящено сообщение Л. М. Пономаренко «Роль когерентного ассеяния при дальнем распространении ультракоротких волн».

Исследование прохождения звуковых или электромагнитных волн через бесконечую периодическую решетку, образованную параллельными цилиндрами, представяет собой сложную дифракционную задачу даже при условии, что период решетки ал по сравнению с длиной волны; хотя в последнем случае волновые поля вблизи лоскости решетки должны переходить в статические, соответствующее «сшивание» ыло связано до последнего времени с определенными трудностями. Теории таких ешеток были посвящены доклады М. И. Гуревича «Звукопроводность частой решетки», Г. Д. Малюжинца «Средние краевые условия на плоскости, определяющие дальнее поле при дифракции длинных волн на частой акустически жесткой ешетке» и А. Н. Сивова «Наклонное падение плоской волны на плоскую решетку из параллельных проводов». В докладе А. М. Моделя и П. В. Талыина «Дифракция плоской волны на бесконечной решетке, состоящей из отдельных

вибраторов» исследовано отражение электромагнитной волны от системы вибраторов, расположенных на плоскости в шахматном порядке.

В докладах М. Д. Хаскинда «Распространение электромагнитных волн над гиротропной средой» и «Излучение электромагнитных волн над тонким гиротропным слоем» дано решение сложных задач о возбуждении волн заданными источниками вблизи подмагниченного феррита или плазмы.

Различные проблемы распространения радиоволн над земной поверхностью рассмотрены в докладах Ю. К. Калинина и А. Д. Петровского «Приближенные граничные условия и дифракция радиоволн», Ю. К. Калинина «Дифракция радиоволн на поверхностных неоднородностях (сравнение теории с экспериментом)», В. В. Новикова «Распространение импульсных сигналов над плоской однородной земной поверхностью (нестационарная задача Зоммерфельда)», Э. М. Гюнненена, Г. И. Макарова и А. В. Мананковой «Распространение электромагнитного импульса над поверхностью сферической земли», Г. Н. Крылова «Поле вертикального диполя и антенны над землей с конечной проводимостью». В докладе Е. Б. Ханахбей «Распространение электромагнитных импульсов в проводящей среде» исследовано распространение как в безграничном проводнике, так и в проводящей среде, граничащей с диэлектриком.

Теории дифракции на волнистых поверхностях были посвящены доклады И. А. Урусовского «Дифракция звука на периодически неровной и неоднородной поверхности», Р. Г. Баранцева «Рассеяние плоской волны на произвольной периодической поверхности», Б. Ф. Курьянова «Рассеяние звука на шероховатой поверхности, образованной двумя типами неровностей» и В. И. Аксенова «К рассеянию электромагнитных волн на периодически неровных поверхностях с конечной проводимостью». В сообщении Ю. П. Лысанова «Дифракция плоской волны на неоднородной поверхности с плавно меняющимися свойствами» показано, что если производная коэффициента отражения достигает максимума при некотором значении координаты x на отражающей плоскости, то от соответствующей линии расходится цилиндрическая волна (как от скачка или излома).

Среди докладов, посвященных волноводам, следует прежде всего отметить работы М. Г. Крейна и Г. Я. Любарского «К теории полос пропускания периодических волноводов», где выведены общие оценки для полос пропускания волн, подчиняющихся скалярному волновому уравнению. Н. А. Кузьмин сделал доклад «Потенциалы и вариационный принцип уравнений электродинамики, описываемых в криволинейной неортогональной системе координат». А. А. Ковтун и Г. А. Макаров в докладе «Нестационарные процессы при распространении импульсных сигналов в круглом волноводе» изложили методику расчета и численные результаты, относящиеся к возбуждению и распространению радиоимпульсов в волноводе (с идеальными стенками и при учете конечной проводимости стенок).

В докладе «Теория нерегулярных акустических волноводов» Б. З. Каценеленбаум рассказал о распространении метода поперечных сечений, развитого ранее для радиоволноводов, на случай акустических волноводов; для волноводов с медленно меняющимися параметрами этот метод позволяет дать явное решение, т. е. найти амплитуды всех волн, рассеянных регулярным участком. Доклад А. Г. Свешникова и И. П. Котика «Методы расчета нерегулярных волноводов» посвящен методам, позволяющим при помощи быстродействующих вычислительных машин произвести расчет произвольного нерегулярного волновода. В докладе М. С. Лившица и М. Ш. Флексера «Синтез передающей линии по заданному закону преобразования волн» рассмотрены общие математические свойства передаточной матрицы неоднородного участка линии.

В заключение следует сказать, что симпозиум не имел прецедентов ни у нас, ни заграницей и подтвердил плодотворность встреч физиков, математиков и инженеров, имеющих дело с дифракцией волн различной природы. На заключительном пленарном заседании симпозиума была принята рекомендация о созыве второго такого совещания весной 1962 г. в г. Горьком.

Надо отметить хорошую организацию симпозиума (стоившую больших трудов председателю оргкомитета профессору Одесского электротехнического института связи М. Д. Хаскинду) и гостеприимство, с которым Одесса встретила многочисленных участников симпозиума, прибывших со всех концов Советского Союза.

Л. А. Вайнштейн

ВЕНЕДИКТ ИВАНОВИЧ КАЛИНИН

Советская радиофизика понесла большую утрату. 15 октября 1960 г. оропостижно скончался известный в нашей стране радиофизик, заслуженный деятель науки РСФСР, доктор физико-математических наук, рофессор Венедикт Иванович Калинин.

Имя В. И. Калинина хорошо известно по его книгам и научным исследованиям, а также по его активной педагогической деятельности в Саратовском университете.

Венедикт Иванович Калинин родился 16 марта 1907 г. в Саратове в мье железнодорожного служащего. После окончания средней школы он ступил в Саратовский университет, в стенах которого прошла почти я его сознательная жизнь от студента-физика до заведующего созданой им кафедрой радиофизики. Еще студентом он начал под руководством К. А. Леонтьева исследовательскую работу в области генерирования сверхвысоких частот и в 1929 г. опубликовал свою первую статью, священную областям колебаний генератора схемы тормозящего поля.

После окончания университета В. И. Калинин некоторое время работал в ЦРЛ в Ленинграде, где организовал группу дециметровых волн. этот период он выполнил ряд важных исследований по генерированию ерхвысоких частот, в частности разработал широко распространенную то время лампу с апериодической сеткой.

В 1933 г. В. И. Калинин вернулся в Саратов и вновь начал работать Саратовском университете. Здесь особенно плодотворно развернулась о творческая деятельность. Эта деятельность была весьма многогранной, идетельствующей о его недюженных способностях и трудолюбии. Широкий кругозор и большая эрудиция позволили Венедикту Ивановичу здать впервые в нашей стране ряд ценных монографий по сверхвысоким стотам, таких, как «Дециметровые волны» (1935 г.), «Дециметровые и нтиметровые волны» (1939 г.) и «Генерирование дециметровых и сантитровых волн» (1948 г.). Кроме этой работы он выполнил ряд оригинальх исследований. Им опубликовано более 50 научных работ, посвященх главным образом вопросам кинематической теории генераторов сверхсоких частот. Обобщение этих исследований было сделано в его докторой диссертации, защищенной в 1944 г.

Научные интересы Венедикта Ивановича Калинина были тесно свя
заны с запросами практики. Под его руководством был выполнен ряд тем
имеющих большое народнохозяйственное значение. Особенно напряжен
ная работа в этом направлении велась в годы войны, за что он был на
гражден медалью «За доблестный труд в Великой Отечественной войн
1941—1945 гг.».

Исключительно серьезное внимание уделял профессор Калинин учеб
ному процессу. Им был разработан ряд профилирующих радиофизиче
ских курсов. Яркие и увлекательные лекции Венедикта Ивановича поль
зовались большим успехом у аудитории. Накопленный им большой педа
гогический опыт был обобщен в ряде учебных пособий, на которые он
совместно со своими учениками затратил много труда и сил («Введени
в радиофизику», 1957 г., «Радиофизический практикум», 1956—1960 гг.).

Придавая большое значение проведению творческих научных дискус
сий, Венедикт Иванович организовал в 1944 г. в Саратовском университе
те постоянно действующий радиофизический семинар. Этот семинар со
действовал вовлечению молодежи в исследовательскую работу и созданию
творческой атмосферы на кафедре. Этим самым Венедикт Иванович спо
собствовал воспитанию научных кадров высокой квалификации, уделяя
этой работе особое внимание. Под его руководством более 10 человек вы
полнили и успешно защитили кандидатские диссертации.

Не замыкаясь в рамках научно-педагогической деятельности, проф. Ка
линин принимал активное участие в общественных мероприятиях, часто
выступал с интересными лекциями перед населением. Одна из его лекций
была издана отдельной брошюрой («Россия — родина радио», 1949 г.).

Плодотворная деятельность Венедикта Ивановича Калинина была вы
соко оценена: в 1959 г. ему было присвоено почетное звание заслуженно
го деятеля науки РСФСР.

Окружающие знали Венедикта Ивановича как человека высокой куль
туры, прямого и принципиального. Круг его интересов был очень широк
Он живо интересовался литературой и искусством, увлекался художест
венной фотографией, страстно любил русскую природу, был горячим па
риотом. Светлый образ Венедикта Ивановича Калинина всегда будет яв
ляться примером честного служения Советской науке и нашей Родине

В. Л. Птарушев, Г. М. Герштейн, В. Я. Красильников

MTA Szegedi Akadémiai Könyvtára

CONTENTS

Sivov A. N. Electrodynamic theory of a dense plane parallel wire grid 483
Evtyanov S. I., Kuleshov V. N. Fluctuations in autooscillators. 496
Kulman N. K., Landa P. S. Investigation of some optimum devices for filtrating pulse signals of random duration using electron models 506
Pisarenko V. F. Concerning the detection of random signals against a noise background 513
Lezin Yu. S. Influence of the storage device parameters upon its operation efficiency 529
Tartakovskiy G. P. Range only radar with frequency modulation in the presence of noise and fluctuations of a reflected signal 536
Kinber B. E. Lateral radiation of mirror antennae 545
Ufimtsev P. Ya. Symmetrical irradiation of finite demension bodies with rotation symmetry 559
Dyadkov S. Resonance conversions and their properties 568
Samuylov G. P. Approximate calculation of proper values of higher types of waves in strip lines. 574
Dashenkov V. M. Characteristic impedance of stub slow-wave structures with round conductors 584
Filimonov G. F. Influence of two kinds of longitudinal periodical modulation upon the properties of a one-beam electron stream 593
Malyshev V. A. On a theory of diode microwave oscillators 604
Igritskiy A. L. Calculation of periodical electrostatic fields in TWT with bifilar helixes. 613
Mikaelyan A. L., Vasilyev A. A. Interaction of magnetostatic oscillations in a ferrite sample during regeneration. P. I. Interaction of the simplest modes of oscillations. 623
Kononchuk L. V. Some properties of a thick layer multialkaline photocathode 631
Bakal M., Dobretsov L. N. Milliken vacuum capacitor. P. I 637
Afinogenov L. P., Bakal M., Filippov Yu. A. Milliken vacuum capacitor P. II 642

BRIEF REPORTS

Tsybakov B. S. Shennon scheme for Gaussian message with a uniform spectrum and for a random noise channel 649
Kinber B. E. On the theory of a receiving antenna 651
Shestopalov V. P., Yakimenko I. P. Attenuation of slow electromagnetic waves in a plasma rod in a longitudinal magnetic field 653
Bass F. G. On electrodynamics boundary conditions on a plane surface with the arbitrary ε 655
Bakhrakh L. E. Estimation of thermal velocities influence in electron beams . . 656
Porev N. D. Calculation of hollow electron beams 659
Libin V. A. Polarization analyzer 661
Bogdanov G. B. Possibilities of ferrites application for absolute measurement of microwave power. 663
Mishin D. D., Kalyagina L. A. Influence of temperature prehistory upon permeability of nickel-zink ferrites 667
Bronstein I. M., Shchuchinskiy Ya. M. Energy spectrum of slow secondary electrons for Be adsorption on W 670
Zhdan A. G., Elinson M. I. Energy distribution of field emission electrons in semiconductors. 671

LETTERS TO THE EDITOR

Miroshnichenko L. S. Photoelectron emission LaB_6 673
Aleskovskiy Yu. M., Granovskiy V. L., Mikhalets E. Recombination radiation of Cs plasma in a magnetic field 674

CHRONICLE

Vainstein L. A. Diffraction waves symposium 676
Patrushev V. L., Gerstein G. M., Krasilnikov V. Y. Venedict Ivanovich Kalinin 679

Цена 1 руб. 38 коп.